合理的思考の技術 Lecture 7
– 同時決定ゲームとナッシュ均衡 –

価値システム専攻助教　小林憲正

June 1, 2009

1　同時決定ゲームとナッシュ均衡

情報の価値の観点からすると、「他者」とは、自分の意思決定に関連性があるときのみ意味がある。 → 赤の他人

実際、多くの動物にとって、他の個体はほとんど存在価値がない。

Definition 1 (標準形ゲーム Normal-Form Game)**.** (N, X, u)*:*

- $N = \{1, ..., n\}$ プレーヤーの集合
- $X = X_1 \times ... \times X_n$ 戦略
- $u = (u_1, ..., u_n)$ 効用 $(u_i : X \to \Re (i = 1, ..., n))$

ゲームの分野では、効用のことを利得 payoff ということが多い。

Example 1 (じゃんけん)**.**　２人じゃんけんは、次の同時決定ゲームの双行列 *bimatrix* で表現される。

ただし、勝ち、あいこ、負けによって得られる利得をそれぞれ $1, 0, -1$ とする。

	グー	チョキ	パー
グー	$0, 0$	$1, 0$	$-1, 1$
チョキ	$-1, 1$	$0, 0$	$1, -1$
パー	$1, -1$	$-1, 1$	$0, 0$

じゃんけんは、**ゼロ和**ゲームの一種である。

Definition 2 (ナッシュ均衡 Nash Equilibrium)**.** 社会状態（＝戦略の組） $x^* = (x_1^*, ..., x_n^*) \in X$ がナッシュ均衡であるとき、すべてのプレーヤー i に対して*,*

$$x_i^* \in \arg\max_{x_i \in X_i} u_i(x_1^*, ..., x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}^*, ..., x_n^*)$$

基本的考え方は、他のプレーヤーの戦略を不確実性であると解釈して、それに対して最適解をとる（＝ゲームの分野では、これを**最適応答**という）。

2　混合戦略ナッシュ均衡

一般には、他のプレーヤーの戦略をピンポイントで予測することは難しい。

集合 X に対して、$\Delta(X)$ で X 上の確率分布の集合を表す。

Definition 3 (混合戦略 mixed-strategy)**.** プレーヤー $i \in N$ の混合戦略 $\alpha \in \Delta(X_i)$

例）　じゃんけんの手、テニスのサービスの打ち分け

注）　混合戦略を、他のプレーヤーの戦略予測と解釈することもある。

Definition 4 (混合戦略 mixed-strategy ナッシュ均衡)**.** 他のプレーヤーの戦略に関する予測の組 $\alpha^* = (\alpha_i^*)_{i \in N}$ がナッシュ均衡であるとは、任意のプレーヤー $i \in N$ で、$\forall x_i \in \operatorname{supp} \alpha_i$ が予測 α_{-i}^* に対して最適応答となっていることである。

Example 2 (じゃんけん)**.** 二人じゃんけんの混合戦略ナッシュ均衡は唯一存在し、両者が 1/3 ずつの確率で、それぞれグー、チョキ、パーを出す。

ナッシュ均衡の基本性質：

- 誘因両立性　（安定な社会規範・慣習の**必要**条件）
- 均衡の複数性と局所安定性　（一つの外的環境に対して安定な社会状態は複数存在し得る）

Example 3 (調整ゲーム – 交通)**.** 調整ゲームには、二つの純粋戦略均衡の他、混合戦略均衡がもう一つある。

	左	右
左	$1, 1$	$0, 0$
右	$0, 0$	$1, 1$

左側通行（ $=$ (左, 左) ）と右側通行（ $=$ (左, 左) ）、考えられる二つの均衡のうち、どちらかをとるべき必然性はない。歴史（例えば、日本で言えばイギリスの制度を導入したとか）など、ゲームの外側の要因による。

しかし、一端、プレーヤーの間で均衡が知られると、それはナッシュの意味で安定となる。

なお、プレーヤーがお互いに相手の通る側についての明確な知識がない場合は、$((1/2, 1/2), (1/2, 1/2))$ も混合戦略ナッシュ均衡になる。