合理的思考の技術 Lecture 3
– 選好と効用 II–

小林憲正

Apr 27, 2009

1 尺度

名目尺度 Nominal Scale 順序構造を持たないラベル付け e.g.) アンケートにおける選択肢に番号を振る

順序尺度 Ordinal Scale 強度を伴わない比較

間隔尺度 Linear (Interval) Scale e.g.) セ氏温度と華氏温度

比率尺度 Ratio Scale e.g.) 絶対温度

2 序数効用

Definition 1 (表現)**.** 効用関数 $u : X \to \Re$ が選好関係 $\succsim$ を表現する $\Leftrightarrow$

$$\forall x, y \in X[x \succsim y \Leftrightarrow u(x) \geq u(y)]$$

Example 2. Bob $\succ$ John $\succ$ Tom ならば、効用関数 u を $u(\text{Bob}) = 3, u(\text{John}) = 2, u(\text{Tom}) = 1$ と定めれば、u は、$\succsim$ を表現する。

一つの選好関係 $\succsim$ を表現する序数効用は、一意的には定まらない。

Proposition 3. 効用関数 u が選好関係 $\succsim$ を表現する $\Rightarrow$

$$\forall \text{単調増加関数} \sigma : \Re \to \Re[\sigma \cdot u \text{ が} \succsim \text{を表現する。}]$$

Theorem 4 (表現可能性)**.** 選好関係が合理的であるときのみ、序数効用関数で表現可能である。

Proposition 5. 選択肢集合 X が有限ならば、すべての合理的な選好関係は序数効用関数によって表現可能である。

Proposition 6. すべての連続で合理的な選好関係は、連続な効用関数で表現可能である。

Example 7 (辞書式順序). $[0, 1] \times [0, 1]$ 上の辞書式順序で表される選好関係を表現する序数効用関数は存在しない。

3　期待効用理論

選択肢空間 P を状態空間 Ω 上の「くじ（＝確率分布)」の集合とする。

Definition 8 (vNM 効用の公理)**.**　くじに関する選好 $\succsim$ について、以下の三つの公理を仮定する：

合理性 Rationality

独立性 Independence $\forall p, q, r \in P \forall \mu \in (0,1)[p \succ q \Rightarrow \mu p + (1-\mu)r \succ \mu q + (1-\mu)r]$

連続性 Continuity $\forall p, q, r \in P \exists \alpha, \beta \in (0,1)[p \succ q \succ r \Rightarrow \alpha p + (1-\alpha)r \succ q \succ \beta p + (1-\beta)r]$

Theorem 9 (期待効用定理)**.** 有限くじの空間 P 上の二項関係 $\succsim$ が vNM 効用の公理を満たす $\Leftrightarrow$

$$\exists \text{関数}\ u : \Omega \to \Re \forall p, q \in P[p \succ q \Leftrightarrow \sum_{\omega} p(\omega)u(\omega) > \sum_{\omega} q(\omega)u(\omega)]$$

しかも、この関数 u は、正のアフィン変換を除いて一意である。

4　公理的アプローチ

- 構造が宿る集合が X 与えられる　（効用理論では選択肢集合）
- 公理　（＝自然な直感的特徴を表現したもの）
- 特徴付けの定理　（効用理論では、表現定理と一意性定理）

参考文献

- Kreps, D. (1988) *Notes on the Theory of Choice*, Westview Press
- Mas-Colell, A. et al. (1995) *Microeconomic Theory*, Oxford University Press