第4章　分布定数回路

4.1　分布定数回路とは

大きな平面導体と，この面に平行な長い導線とからなる図 4.1 のような回路では，平面導体と導線の間の静電容量，往復電流に対するインダクタンスなどの回路定数が，導線に沿って連続的に分布している。このような回路を**分布定数回路**という。

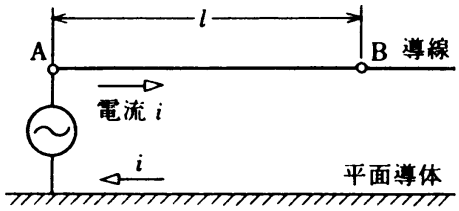

図 4.1: 平面導体と導線

いま，導線の一端 A に正弦波電圧を加えた場合，平面導体に対する導線の電圧がどのように変化するか考える。簡単のため回路は無損失とすると，導線の電圧は図 4.2(a) に示す回路で調べることができる。

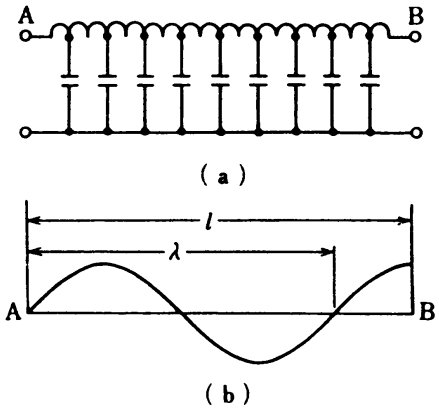

図 4.2: LC 分布定数回路と電圧の分布

さて，この回路で点 A の電圧が上昇すると，インダクタンスを通して隣接する右側の静電容量が充電され，端子電圧が上昇する。時間の経過とともに，隣接する静電容量がインダクタンスを通して次々と充電され，その結果，電圧上昇は右方向に伝播する。このような電圧変化の伝播を電圧波という。その伝播速度は後述するように，空気中の無損失導体系では真空中の光速 $c \simeq 3 \times 10^8$[m/s] に等しい。

以上とは逆に，点 A の電圧が低下すると，静電容量に蓄えられた電荷が隣接するインダクタンスを通して次々と放電し，電圧低下も右方向に伝播する。

以上の結果，ある時刻では，導線の電圧は例えば図 4.2(b) のように分布する。ただし ℓ は着目している導線の長さ，λ は電圧波の波長である。この図からわかるように，分布定数回路では，導線の電圧は時間と場所の関数になる。

図 4.2(b) では ℓ が λ よりも大きい場合が示してあるが，もし $\ell \ll \lambda$ ならば導線の電圧はほぼ均一に分布し，時間だけの関数になる。この場合には，導線と平面導体の系は近似的に集中定数回路とみなせる。すなわち，取り扱う現象の波長が回路の大きさに比べて十分長い場合には，回路の大きさを無視しても差し支えなく，このとき回路を集中定数回路として扱うことができる。

ところが，現象の波長が短くなり回路の大きさと同程度になると，もはや回路の大きさを無視することができなくなる。このときには，回路を分布定数回路として扱わなければならない。

電圧波の伝播速度を v，電源の周波数を f，周期を T とすると，$\lambda = v/f = vT$ の関係があるので，集中定数回路として扱える条件 $\ell \ll \lambda$ は

$$\ell \ll \frac{v}{f} \qquad \text{または} \qquad \frac{\ell}{v} \ll T \tag{4.1}$$

となる。したがって，高周波になるほど集中定数回路とはみなせなくなる。

近年，パルス回路における駆動周波数が非常に高くなり，プリント配線のマイクロストリップラインも分布定数回路として扱うことが必要になってきた。このため，分布定数回路の過渡現象に関する知識の必要性はきわめて高い。

4.2　無損失 2 導体系の過渡現象

4.2.1　波動方程式

分布定数回路を，扱う現象の波長に比べて十分小さな小区間に分けて考えると，小区間では集中定数回路として扱ってもよいので，この分布定数回路における電圧，電流分布は図 4.3 に示すような等価回路によって求めることができる。ここでは，回路定数が一様に分布している

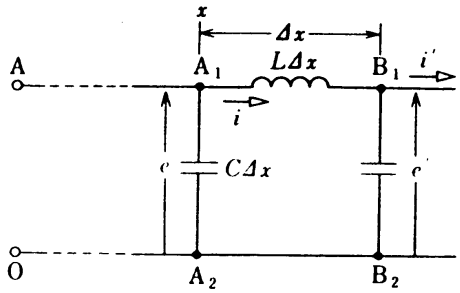

図 4.3: 分布定数回路の等価回路

無損失の分布定数回路を考える。

インダクタンスおよび静電容量は，それぞれ単位長さ当たり L[H/m]，C[F/m] であるとすると，図より

$$e' = e + \Delta e = e - (L\Delta x)\frac{\partial i}{\partial t} \tag{4.2}$$

であるので，Δx が 0 になる極限では

$$\frac{\partial e}{\partial x} = -L\frac{\partial i}{\partial t} \tag{4.3}$$

が得られる。同様に

$$i' = i + \Delta i = i - (C\Delta x)\frac{\partial(e + \Delta e)}{\partial t} \tag{4.4}$$

であるから，二次の微小量を無視すると次式が得られる。

$$\frac{\partial i}{\partial x} = -C\frac{\partial e}{\partial t} \tag{4.5}$$

式 (4.3)，(4.5) が分布定数回路の基礎方程式である。

式 (4.3) を x で偏微分した式に，式 (4.5) を t で偏微分した式を代入すると，次の e に関する 2 階線形偏微分方程式が得られる。

$$\frac{\partial^2 e}{\partial x^2} = LC\frac{\partial^2 e}{\partial t^2} \tag{4.6}$$

同様に i に関する偏微分方程式は

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = LC\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} \tag{4.7}$$

となり，式 (4.6) と同型である。この型の微分方程式を一次元の**波動方程式**という。

4.2.2 波動方程式の一般解

波動方程式 (4.6) の一般解は，f_1，f_2 を任意関数として

$$e = f_1(x - vt) + f_2(x + vt) \tag{4.8}$$

と表されるダランベール (d'Alembert) の解，または

$$e = f_1\left(t - \frac{x}{v}\right) + f_2\left(t + \frac{x}{v}\right) \tag{4.9}$$

で与えられる。ただし

$$v = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{4.10}$$

は進行波の**位相速度**を表している。位相面の伝播を考えると，$f_1(x - vt)$ は x の正方向に速度 v で伝播する電圧波を表し，$f_2(x + vt)$ は x の負方向に伝播する電圧波を表わす。進行方向を元に，f_1，f_2 をそれぞれ，**右進波**，**左進波**とも呼ぶ。

式 (4.8) を式 (4.5) に代入して i を求めると

$$i = \frac{1}{Z}\{f_1(x - vt) - f_2(x + vt)\} \tag{4.11}$$

が得られる。ただし

$$Z = \sqrt{\frac{L}{C}} \tag{4.12}$$

は**特性インピーダンス**と呼ばれる。

ここで，電圧波の右進波，左進波をそれぞれ

$$e_+ = f_1(x - vt), \qquad e_- = f_2(x + vt) \tag{4.13}$$

とおくと，式 (4.8)，(4.11) は，それぞれ次のように表される。

$$e = e_+ + e_- \tag{4.14}$$

$$i = i_+ \pm i_- \tag{4.15}$$

右進波，左進波それぞれの電圧，電流の関係は

$$i_+ = \frac{e_+}{Z}, \qquad i_- = \mp\frac{e_-}{Z} \tag{4.16}$$

と表され，複号は式 (4.15) と同順である。この式からわかるように，式 (4.12) で与えられる Z は，進行波の電圧と電流の比を表しているので，特性インピーダンスと呼ばれる。

式 (4.15)，(4.16) の複号について説明しておく。

式 (4.16) の i_- の符号が負になるのは，電流の正方向を図 4.4(a) のように x の正方向に取った場合で，正極性の電圧波が負方向に進むときには，電流の符号は負になる。このとき，線路電流は式 (4.15) において，複号の上側の符号を使った式で表される。この場合の正方向および負方向に進む電圧波とそれぞれに対応する電流波を図 4.4(b) に示す。

もし，電流の正方向を図 4.5(a) のように波の進行方向に選べば，式 (4.15)，(4.16) の複号において下側の符号が使われる。すなわち

$$i = i_+ - i_- \tag{4.17}$$

$$i_\pm = \frac{e_\pm}{Z} \tag{4.18}$$

このとき，正方向に進む波に対しても，負方向に進む波に対しても，線路の電圧と電流の関係は同じになる。本章では以後，図 4.5(a) に示すように，電流の正方向を波の進行方向に定義する。

式 (4.16) が，**2 導体系の基本式**で，進行波の波形は，後述するように，境界条件および初期条件によって決定される。

4.2.3　進行波の伝播速度と特性インピーダンス

代表的な伝送線路における進行波の伝播速度と特性インピーダンスを求める。ただし，媒質の透磁率を μ，誘電率を ε とする。

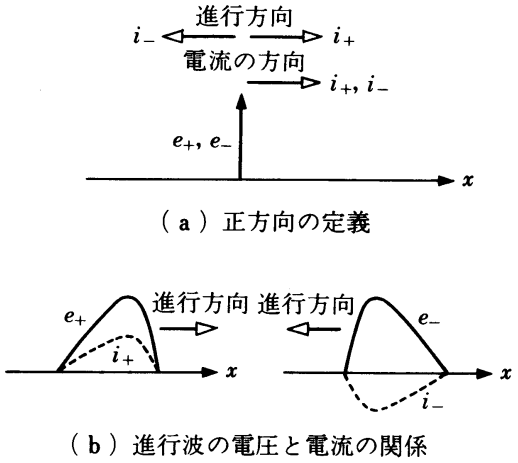

図 4.4: 正方向の定義と進行波の電圧・電流の関係 1

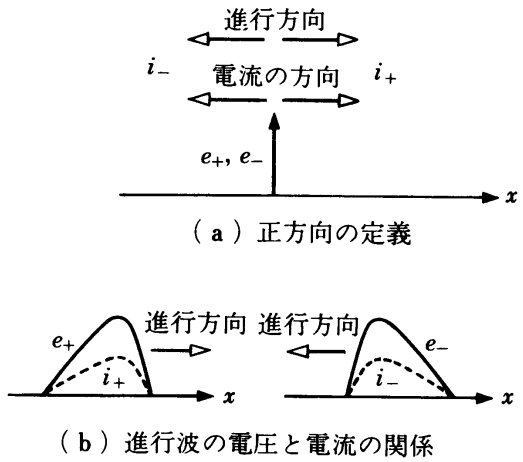

図 4.5: 正方向の定義と進行波の電圧・電流の関係 2 (本章での定義)

平行導線

図 4.6 のような平行導線において，導線の半径が r[m]，導線の中心間の距離が d[m] で $r \ll d$ の場合は，往復電流に対する単位長さ当たりのインダクタンス L および静電容量 C は

$$L = \frac{\mu}{\pi} \ln \frac{d}{r} \qquad [\mathrm{H/m}] \tag{4.19}$$

$$C = \frac{\pi\varepsilon}{\ln(d/r)} \qquad [\mathrm{F/m}] \tag{4.20}$$

で与えられる。真空中の透磁率は $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$[H/m]，真空中の光速 $c = 1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0} \simeq 3 \times 10^8$[m/s] であるから，進行波の伝播速度 v および特性インピーダンス Z は

$$v = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}} \quad [\mathrm{m/s}] \tag{4.21}$$

$$Z = \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \ln \frac{d}{r} = 120\sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}} \ln \frac{d}{r} \ [\Omega] \tag{4.22}$$

で与えられる。ただし μ_r，ε_r はそれぞれ比透磁率および比誘電率である。

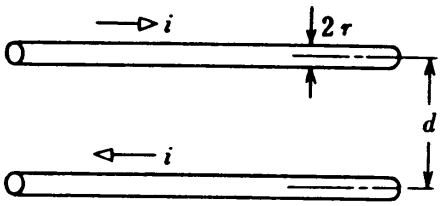

図 4.6: 平行導線

導線と平面導体

非常に大きな平面導体と，この表面から h[m] の距離に張られた半径 r[m] の導線とからなる図 4.7 のような 2 導体系では，$r \ll h$ の場合

$$L = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{2h}{r} \qquad [\mathrm{H/m}] \tag{4.23}$$

$$C = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln(2h/r)} \qquad [\mathrm{F/m}] \tag{4.24}$$

である。したがって

$$v = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}} \quad [\mathrm{m/s}] \tag{4.25}$$

$$Z = \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \ln \frac{2h}{r} = 60\sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}} \ln \frac{2h}{r} \ [\Omega] \tag{4.26}$$

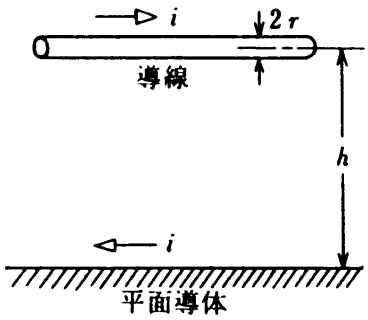

図 4.7: 導線と平面導体

同軸線

内部導体の半径が r[m]，外部導体の半径が D[m] の図 4.8 のような同軸線では

$$L = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{D}{r} \qquad [\mathrm{H/m}] \tag{4.27}$$

$$C = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln(D/r)} \qquad [\mathrm{F/m}] \tag{4.28}$$

である。したがって

$$v = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}} \quad [\mathrm{m/s}] \tag{4.29}$$

$$Z = \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \ln \frac{D}{r} = 60\sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}} \ln \frac{D}{r} \ [\Omega] \tag{4.30}$$

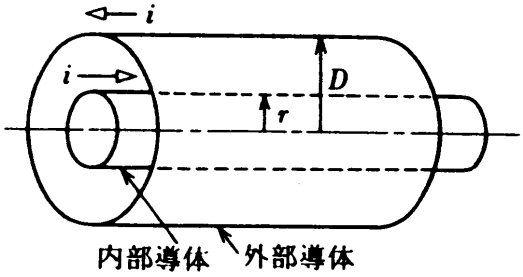

図 4.8: 同軸線

マイクロストリップライン

図 4.9 のような導体幅 W[m]，導体の厚さ t[m]，絶縁物の厚さ h[m] のマイクロストリップラインでは，$W \gg h$ の場合

$$L = \frac{\mu h}{W} \qquad [\mathrm{H/m}] \tag{4.31}$$

$$C = \frac{\varepsilon W}{h} \qquad [\mathrm{F/m}] \tag{4.32}$$

$$Z = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{h}{W} \simeq 377\sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}}\frac{h}{W} \ \ [\Omega] \tag{4.33}$$

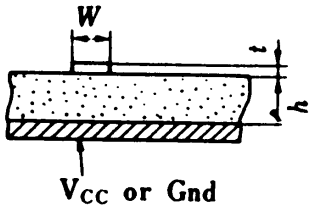

図 4.9: マイクロストリップライン

また，$W \ll h$ の場合には，式 (4.23)，(4.24)，(4.26) において，$W = 2r$ と近似して

$$L = \frac{\mu}{2\pi}\ln\frac{4h}{W} \qquad [\mathrm{H/m}] \tag{4.34}$$

$$C = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln(4h/W)} \qquad [\mathrm{F/m}] \tag{4.35}$$

$$Z = \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\ln\frac{4h}{W} = 60\sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}}\ln\frac{4h}{W} \ \ [\Omega] \tag{4.36}$$

と表すことができる。

比透磁率が 1 のとき，特性インピーダンスを表す近似式[1]は式 (4.33) と式 (4.36) の中間の値で

$$Z = \frac{60}{\sqrt{\varepsilon_{re}}}\ln\frac{5.98h}{0.8W + t} \ \ [\Omega] \tag{4.37}$$

[1]H.R.Kaupp : Characteristics of Microstrip Transmission Lines, IEEE, E, CEC-16, 2 (1967)

ここで

$$\varepsilon_{re} = \frac{\varepsilon_r + 1}{2} + \frac{\varepsilon_r - 1}{2}\sqrt{\frac{1}{1 + \dfrac{10h}{W}}} \tag{4.38}$$

代表的な材料の比誘電率

絶縁材料の比透磁率 μ_r はほぼ 1 であるが，比誘電率 ε_r は材料により異なる。代表的な絶縁材料の比誘電率を表 4.1 に示す。

表 4.1: 代表的な材料の比誘電率

材料	比誘電率
アルミナセラミック	10.0
ガラスエポキシ	4.8
ポリイミド	3.8
テフロンガラス	2.55
テフロン	2.2
ポリエチレン	2.5 ～ 4.0

4.2.4　進行波のエネルギー

x の正方向に伝播する進行波 $e_+(x,t)$，$i_+(x,t)$ が保有する，線路単位長さ当たりの静電エネルギー U_E および磁気エネルギー U_M は

$$U_E = \frac{C}{2}e_+^2 = \frac{C}{2}(Zi_+)^2 = \frac{L}{2}i_+^2 = U_M \tag{4.39}$$

すなわち，進行波の静電エネルギーと磁気エネルギーは等しく，全エネルギー U_T は

$$U_T = U_E + U_M = 2U_E = 2U_M \tag{4.40}$$

演習問題 1.　内部導体半径 0.25 (mm)，外部導体半径 1.5 (mm) の同軸線を伝わる進行波の速度 v および特性インピーダンス Z を求めなさい。

略解　絶縁物の比誘電率は $\mu_r = 1$ とおけるので，与えられた数値を式 (4.29) および (4.30) に代入すると $v = 2 \times 10^8$ (m/s)，$Z \simeq 71.7$ (Ω) が得られる。

通信関係で良く用いられる同軸ケーブル 3C2V の最初の数字 3 は概略のケーブル外径 (mm) を，C はケーブルの特性インピーダンスが 75 (Ω) であることを，次の数字 2 はポリエチレン充填型の絶縁であることを表している。最後の記号 V はケーブルがビニールによって被覆されていることを表している。なお，測定等に良く用いられる特性インピーダンス 50 (Ω) のケーブルは 2 番目の記号が D で，例えば 3D2V のように表される。

演習問題 2.　厚さ 2 (mm) のガラスエポキシ基板を用いた，極めて薄い，幅 2 (mm) のマイ

クロストリップラインの特性インピーダンス Z を求めなさい。

略解 ガラスエポキシ基板の比誘電率は表 4.1 より $\varepsilon_r = 4.8$ である。また，極めて薄いマイクロストリップラインなので，その厚さは無視できるとして $t = 0$ と置くことができる。式 (4.37) にこれらの数値および与えられた数値を代入すると $Z \simeq 64.8$ (Ω) が得られる。

なお，マイクロストリップラインの特性インピーダンスは通常，50∼100 (Ω) である。

4.2.5 線路の送端における進行波

特性インピーダンス Z の一様な分布定数回路 (線路) を考える。

図 4.10(a) のように，内部抵抗 R，信号源電圧 e_0 の電源が半無限長線路の送端 A に接続されており，線路には送端から送り出される入射波 (右進波) だけが存在し，後述する反射波 (左進波) は存在しないするものとする。

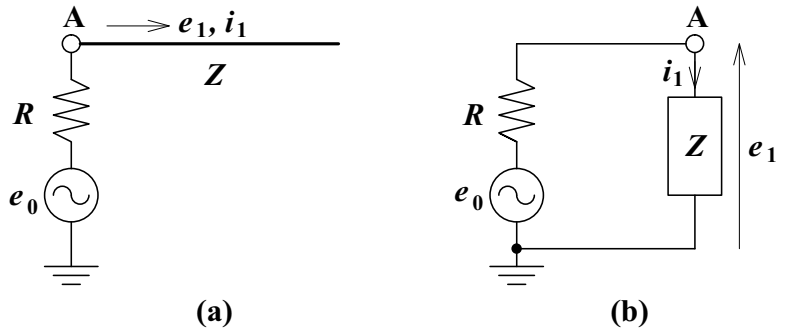

図 4.10: 線路の送端における進行波

このとき，線路の送端での等価回路は図 4.10(b) のように表すことができるので，進行波の電圧 e_1，電流 i_1 は

$$e_1 = \frac{Z}{R+Z}e_0, \qquad i_1 = \frac{e_1}{Z} = \frac{e_0}{R+Z} \tag{4.41}$$

と表すことができる。

等価回路からわかるように，送端では，分布定数線路をインピーダンス Z の抵抗と等価と考えてよい。ただし，抵抗では電力が消費されるが，線路の場合には，これに相当する電力が進行波として送端から送り出される。

4.2.6 線路の終端における進行波

進行波の透過と反射

図 4.11 のように，特性インピーダンス Z の半無限長線路の終端を抵抗 R で接地した回路において，線路の左方から既知電圧波 e_1 が入射してきた。e_1 が線路終端に到達すると線路状態が異なるため，波形は何らかの変形を受ける。

入射波を e_1，i_1，反射波を e_1'，i_1' とすれば，分布定数回路と集中定数回路 R との接続点 A における境界条件は

$$e_1 + e_1' = e_2 = R\,i_2 \tag{4.42}$$

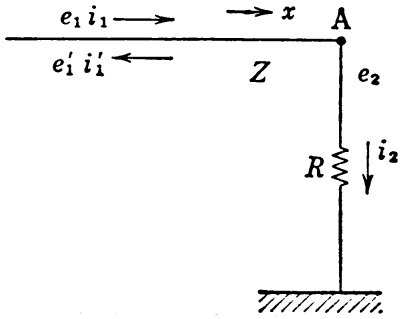

図 4.11: 線路の終端における進行波

$$i_1 - i_1' = i_2 \tag{4.43}$$

で与えられる。ただし e_2 は点 A の電位である。一方，進行波の基本式は

$$i_1 = \frac{e_1}{Z}, \qquad i_1' = \frac{e_1'}{Z} \tag{4.44}$$

であるから，これらを連立して解くと次の結果が得られる。

$$e_1' = \frac{R - Z}{R + Z}\, e_1 \tag{4.45}$$

$$e_2 = \frac{2\,R}{R + Z}\, e_1 \tag{4.46}$$

$$i_2 = \frac{e_2}{R} = \frac{2\,e_1}{R + Z} = \frac{2Z}{R + Z} i_1 \tag{4.47}$$

(a) $R = \infty$ の場合　　線路終端が開放されている場合に相当し

$$e_1' = e_1, \qquad e_2 = 2\,e_1 \tag{4.48}$$

$$i_1' = i_1, \qquad i_2 = 0 \tag{4.49}$$

となる。すなわち，入射波はそのままの形で反射 (正の完全反射) され，線路終端の電圧は入射電圧の 2 倍になる。電流は入射波と反射波の方向が相反するため，相殺されて 0 になる。

(b) $R = 0$ の場合　　線路の終端が直接接地されている場合に相当し

$$e_1' = -e_1, \qquad e_2 = 0 \tag{4.50}$$

$$i_1' = -i_1, \qquad i_2 = 2\,i_1 \tag{4.51}$$

となる。すなわち，入射波は負の完全反射を行い，線路終端の電流は入射電流の 2 倍になる。

(c) $R = Z$ の場合　　この場合には

$$\left.\begin{array}{l} e_2 = e_1 \\ e_1' = i_1' = 0 \end{array}\right\} \tag{4.52}$$

となり，反射波を生じない。このような状態を，抵抗が線路に**整合** (match) したという。

例 1　長さ ℓ，特性インピーダンス Z，進行波の伝播速度 v なる線路に，図 4.12(a) のように内部抵抗 $R\,(=Z)$ の信号源を接続した。ただし，線路の受端側は開放されており，また信号が線路を伝わるのに要する時間を $T=\ell/v$ とする。

信号源電圧が

$$e_0(t)=\begin{cases}\dfrac{t}{\tau}E\,, & 0\le t\le\tau\\ E\,, & \tau\le t\le\infty\end{cases}$$

と表される場合の，送端および受端の電圧波形 e_A，e_B を求める。ここで，τ は信号の立ち上がり時間である。

受端が開放されているので，ここでの反射係数は 1 で，入射波は正の完全反射を受ける。一方，送端側では，$R=Z$ であるので，信号源電圧の 1/2 の電圧が線路に送り出される。また，反射波に対しては整合がとれているので，無反射である。

線路長 ℓ を一定，したがって T も一定とし，信号の立ち上がり時間 τ を変化させたときの，送端波形 $e_A(t)$ および受端波形 $e_B(t)$ を図 4.12(b) に示す。図には $\tau/T=0.5,1,2,4$ の場合について示してあるが，$\tau/T<2$ の場合には，送端の電圧波形 e_A に顕著な段差ができていることがわかる。これより，線路を分布定数回路として扱う必要がある場合のおおよその目安は，信号が線路を往復する時間 $2T$ に比べ，立ち上がり時間 τ の方が短い場合であることがわかる。

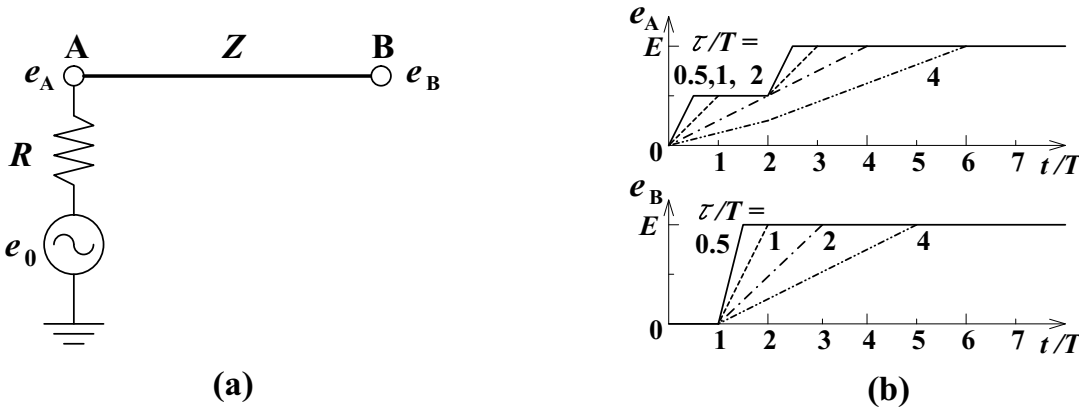

図 4.12: (a) の回路における信号の立ち上がり時間に対する (b) 端子電圧波形の変化

例 2　送信側の信号源の内部抵抗 20 (Ω)，電圧 4 (V)，立ち上がり時間 0.5 (ns)，マイクロストリップラインの特性インピーダンス 60 (Ω)，線路長 15 (cm)，信号の伝播速度 1.5×10^8 (m/s)，受信側の入力抵抗 100 (kΩ) の場合について，送信端および受信端の電圧波形を求める。

線路に送り出される信号電圧は

$$4\times\frac{60}{20+60}=3\quad(\mathrm{V})$$

線路を信号が伝わるのに要する時間は

$$\frac{0.15}{1.5\times10^8}=1\times10^{-9}=1\quad(\mathrm{ns})$$

受信側の入力抵抗が 100 (kΩ) であるので，受信端の反射係数は

$$\frac{100 \times 10^3 - 60}{100 \times 10^3 + 60} \simeq 1.00$$

となり，入射波はほぼ正の完全反射を受ける。

反射波が送信端に戻ってきたとき，ここでの反射係数は

$$\frac{20 - 60}{20 + 60} = -0.5$$

これらより，送信端および受信端の電圧波形はそれぞれ図 4.13(a)，(b) のようになる。

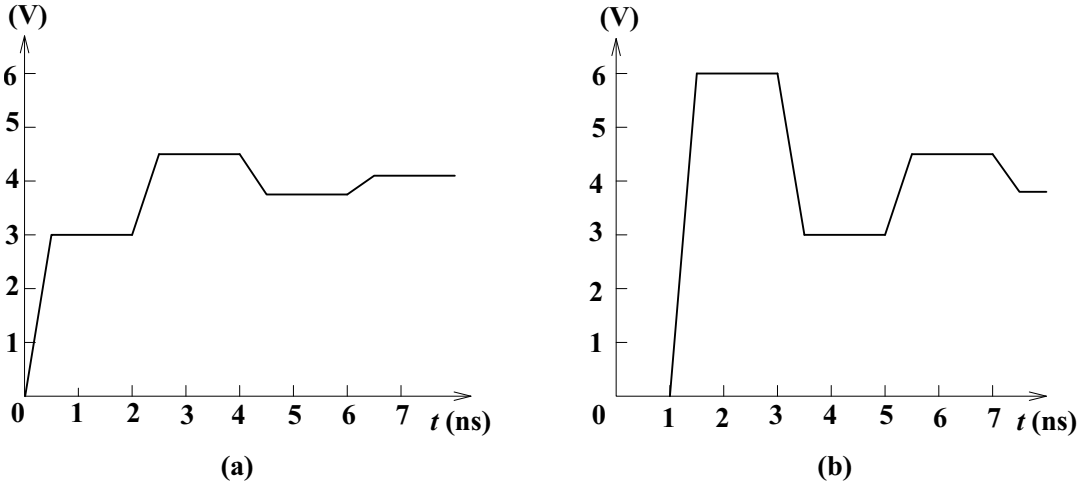

図 4.13: (a) 送信端および (b) 受信端の電圧波形

鳳-テブナンの定理

線路の終端が開放されている場合，そこには $2\,e_1$ の電圧が現れる。これを**鳳-テブナンの定理**に適用する。

鳳-テブナンの定理は図 4.14 のような集中定数回路においてスイッチ S を閉じたとき，インピーダンス $\dot{Z}$ に流れる電流 $\dot{I}$ は

$$\dot{I} = \frac{\dot{E}}{\dot{Z}_i + \dot{Z}} \tag{4.53}$$

で与えられるという定理である。ここで $\dot{E}$ はスイッチを閉じる前に AB 間に現れる電圧で，$\dot{Z}_i$ は AB の左方の回路の内部インピーダンスである。

式 (4.47) と式 (4.53) とを比べることにより，e_2，i_2 は図 4.15 の等価集中定数回路によって求められることがわかる。

反射波 e_1'，i_1' は，

$$e_1' = e_2 - e_1, \qquad i_1' = \frac{e_1'}{Z} \tag{4.54}$$

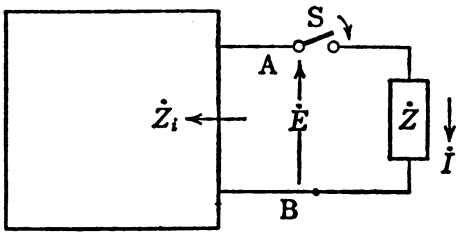

図 4.14: 鳳-テブナンの定理

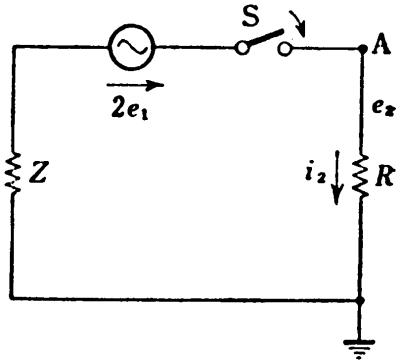

図 4.15: 図 4.11 の鳳-テブナン等価回路

から求められる。

例題　図 4.11 の R の代わりに，インダクタンス L で接地した回路において，線路側から波高値 E のステップ電圧波が入射するとき，線路終端ではどのように変化するか。

解　L を流れる電流 i_2 は鳳-テブナンの定理により図 4.16 の回路から求められる。この回路では

$$L\frac{d\,i_2}{dt} + Z\,i_2 = 2\,E \tag{4.55}$$

が成立し，入射波が線路終端に到達した時刻を $t = 0$ とすれば上式の解は

$$i_2 = \frac{2\,E}{Z}\left\{1 - \exp\left(-\frac{Z}{L}t\right)\right\} \tag{4.56}$$

で与えられる。したがって L の端子電圧 e_2 および反射波 e_1' は

$$e_2 = L\frac{d\,i_2}{dt} = 2\,E\exp\left(-\frac{Z}{L}t\right) \tag{4.57}$$

$$e_1' = e_2 - e_1 = E\left\{2\,\exp\left(-\frac{Z}{L}t\right) - 1\right\} \tag{4.58}$$

と表される。

式 (4.57) および (4.58) で与えられる L の端子電圧 e_2 および反射電圧 e_1' の波形を図 4.17 に示す。

演習問題　図 4.11 の R の代わりに，静電容量 C で接地した回路において，線路側から波高値 E のステップ電圧波が入射するとき，線路終端ではどのように変化するか。端子電圧および反射波を求め，その時間変化の概略を図示せよ。

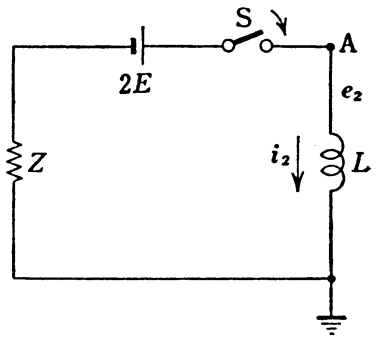

図 4.16: 例題の鳳-テブナン等価回路

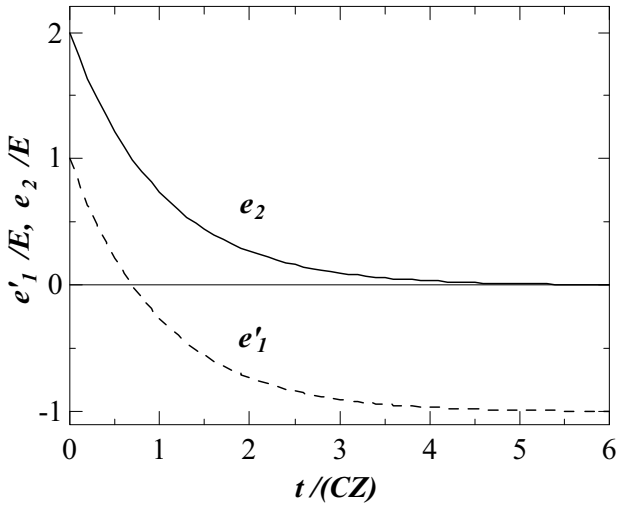

図 4.17: インダクタンスで終端された場合の端子電圧および反射電圧波形

4.2.7 線路の接続点における進行波

進行波の透過と反射

図 4.18 にように，特性インピーダンスが Z_1，Z_2 なる半無限長線路が点 A で接続されている。この回路で，左方から入射波 e_1，i_1 が接続点 A に到来すると，反射波 e_1'，i_1' と透過波 e_2，i_2 に分かれる。

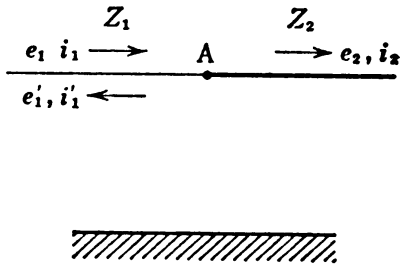

図 4.18: 線路の接続点

透過波に関しては $i_2 = e_2/Z$ が成り立つので，この場合の進行波の反射・透過は，図 4.11 の抵抗 R を抵抗 Z_2 に置き換えた回路で調べることができる。式 (4.45)，(4.46)，(4.47) から，ただちに

$$\frac{e_1'}{e_1} = \frac{i_1'}{i_1} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} = \xi_{12} \tag{4.59}$$

$$\frac{e_2}{e_1} = \frac{2\,Z_2}{Z_1 + Z_2} = \eta_{12} \tag{4.60}$$

$$\frac{i_2}{i_1} = \frac{2\,Z_1}{Z_1 + Z_2} = \eta_{12}' \tag{4.61}$$

が得られる。

特性インピーダンスの異なる線路の接続点では，必ず反射を生じるので，これがノイズとなる。また，線路の分岐点でも同様の現象が生じる。

演習問題 1. 図 4.18 の線路の接続点 A が抵抗 R で接地されている。このときの透過波，反射波および R を流れる電流を求めよ。

略解 鳳－テブナンの等価回路を使って，簡単に解くことができる。スイッチを置く場所としては，接続点 A の左側，抵抗側，右側が考えられる。例えば，接続点 A の右側にスイッチを設けると，透過波 e_2 を求めるための鳳－テブナン等価回路は図 4.19 のように表される。ここで，電源電圧 e は式 (4.46) より

$$e = \frac{2R}{Z_1 + R} e_1$$

である。

図 4.19 より，透過波 e_2 は

$$e_2 = \frac{Z_2}{(Z_1//R) + Z_2} e = \frac{2RZ_2}{Z_1Z_2 + Z_2R + RZ_1} e_1$$

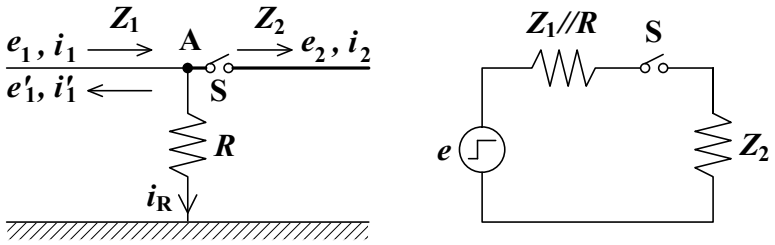

図 4.19: 演習問題 1 に対する鳳－テブナン等価回路

また，反射波 e_1' は

$$e_1' = e_2 - e_1 = \frac{RZ_2 - Z_1Z_2 - RZ_1}{Z_1Z_2 + Z_2R + RZ_1}e_1$$

さらに，抵抗を流れる電流 i_R は，透過電圧 e_2 が抵抗の端子電圧と等しいので

$$i_R = \frac{e_2}{R} = \frac{2Z_2}{Z_1Z_2 + Z_2R + RZ_1}e_1$$

スイッチを接続点 A の左側あるいは抵抗側に置いた場合も同様に解くことができるので，各自，試みられたい。

演習問題 2.　図 4.18 の線路の接続点 A において，特性インピーダンス Z_3 の線路が特性インピーダンス Z_2 の線路に並列接続された。このときの各線路の透過波，反射波を求めよ。ただし各線路間には相互作用がないものとする。

略解　接続点 A から右側を見ると，特性インピーダンス Z_2 の線路と特性インピーダンス Z_3 の線路が並列接続されているので，合成特性インピーダンス Z は

$$Z = Z_2//Z_3 = \frac{Z_2Z_3}{Z_2 + Z_3}$$

したがって，入射波を e_1 とすると，透過波 e_2 は式 (4.60) より

$$e_2 = \frac{2Z}{Z_1 + Z}e_1 = \frac{2(Z_2 + Z_3)}{Z_1Z_2 + Z_2Z_3 + Z_3Z_1}e_1$$

同じ波高値の透過波 e_2 が特性インピーダンス Z_2 および Z_3 の線路をそれぞれ伝播していく。

また，反射波 e_1' は式 (4.59) より

$$e_1' = \frac{Z - Z_1}{Z + Z_1}e_1 = \frac{Z_2Z_3 - Z_3Z_1 - Z_1Z_2}{Z_1Z_2 + Z_2Z_3 + Z_3Z_1}e_1$$

演習問題 3.　図 4.18 の線路の接続点 A に直列抵抗 R を挿入 (特性インピーダンス Z_1，Z_2 の線路の間に抵抗を挿入) したときの透過波，反射波を求めよ。

略解　接続点 A から右側を見ると，抵抗 R と特性インピーダンス Z_2 の線路が直列接続されているので，合成インピーダンス Z は

$$Z = R + Z_2$$

したがって，Z にかかる電圧 e_2' は式 (4.60) より

$$e_2' = \frac{2(R+Z_2)}{Z_1+R+Z_2}e_1$$

この電圧を抵抗 R と線路 Z_2 で分圧した

$$e_2 = \frac{Z_2}{R+Z_2}e_2' = \frac{2Z_2}{Z_1+R+Z_2}e_1$$

が線路を伝播していく透過波となる。

また，反射波 e_1' は式 (4.59) より

$$e_1' = \frac{Z-Z_1}{Z+Z_1}e_1 = \frac{R+Z_2-Z_1}{Z_1+R+Z_2}e_1$$

演習問題 4. 図 4.18 の線路の接続点 A が静電容量 C で接地されている。左方から波高値 E のステップ電圧波が進入してきた。電圧波が接続点 A に到達した時刻を $t=0$ として，透過波 e_2，反射波 e' の時間変化を求めよ。

略解 接続点 A とコンデンサー C の間にスイッチを入れて鳳－テブナンの等価回路を考えると，p. 49 の演習問題と全く同様に扱うことができるので，透過波 e_2 を簡単に求めることができる。ただし，図 **??**において，電源側のインピーダンス Z は，スイッチから線路側を見たときのインピーダンス

$$Z \to Z_1//Z_2 = \frac{Z_1Z_2}{Z_1+Z_2}$$

に置き換え，電源電圧 $2E$ はスイッチを開いているときの接続点 A の端子電圧

$$2E \to \frac{2Z_2}{Z_1+Z_2}E$$

に置き換える必要がある。

計算を実行すると，透過波 e_2 は

$$e_2(t) = \frac{2Z_2}{Z_1+Z_2}E\left\{1-\exp\left(-\frac{t}{CZ}\right)\right\} \qquad \text{ただし}\ Z = \frac{Z_1Z_2}{Z_1+Z_2}$$

また，入射波が波高値 E のステップ電圧波であるから，反射波 e_1' は

$$e_1'(t) = e_2(t) - E = \frac{2Z_2}{Z_1+Z_2}E\left\{\frac{Z_2-Z_1}{2Z_2} - \exp\left(-\frac{t}{CZ}\right)\right\}$$

演習問題 5. 図 4.20 のように特性インピーダンスがそれぞれ Z_1，Z_2 の半無限長線路を直列接続し，直流電圧 E_0 を加えた。線路間の結合がないとして，それぞれの線路を伝播する電圧波の波高値を求めよ。

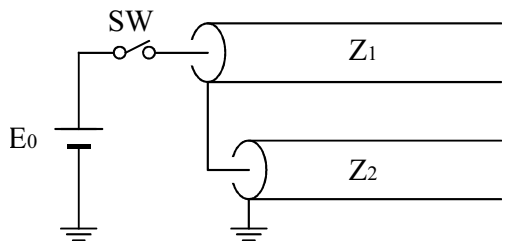

図 4.20: 線路の直列接続 (線路間の結合はない)

略解　スイッチ SW から線路側をみると，特性インピーダンス Z_1 と Z_2 の線路が直列接続されている。したがって，それぞれの線路には，電源電圧 E_0 を特性インピーダンスで分割した

$$e_1 = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} E_0, \qquad e_2 = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} E_0$$

の電圧波が伝播する。

4.2.8　格子図

図 4.18 では接続点は A だけであるが，回路中に接続点が多数存在するときには，進行波の反射・透過が繰り返される。このような場合には格子図を用いると便利である。

例えば，特性インピーダンスが Z_1，Z_2，Z_3 の 3 本の線路が直列に接続されている図 4.21 (a) の回路を考える。左方から e なる電圧波が進行してきて点 A に到達すると (この時刻を $t = 0$ とする)，e の一部は反射係数 $\xi_{12} = (Z_2 - Z_1)/(Z_2 + Z_1)$ で反射し，他は透過係数 $\eta_{12} = 2Z_2/(Z_1 + Z_2) = 1 + \xi_{12}$ で透過する。透過波 $\eta_{12}\, e$ は Z_2 の線路を伝播して T 秒後 ($T = \ell/v$，ℓ は AB 間の距離，v は伝播速度) に点 B に到達し，そこで一部は反射係数 $\xi_{23} = (Z_3 - Z_2)/(Z_3 + Z_2)$ で反射し，他は透過係数 $\eta_{23} = 2Z_3/(Z_2 + Z_3) = 1 + \xi_{23}$ で透過して右方へ去る。点 B での反射波 $\xi_{23}\eta_{12}\, e$ は $t = 2T$ には点 A に戻り，そこで反射係数 $\xi_{21} = (Z_1 - Z_2)/(Z_1 + Z_2) = -\xi_{12}$ で反射し，他は透過係数 $\eta_{21} = 2Z_1/(Z_2 + Z_1) = 1 + \xi_{21}$ で透過して右方へ去る。

以下同様にして多数の反射・透過波を生じるが，線路の位置と時刻を直交座標にとって，反射・透過を順次記入すると，図 4.21 (b) が得られる。これが格子図である。格子図を用いて，点 A から距離 x_1 にある点 P の時刻 $t = t_1$ における電圧 $e_p(t_1)$ を求めるには，t_1 までに点 P に到達する波を重ね合わせればよい。ただし，各波の到達までの時間遅れを考慮する必要がある。すなわち

$$\begin{aligned} e_p(t_1) &= \eta_{12} \cdot f\left(t_1 - \frac{x_1}{v}\right) \\ &\quad + \xi_{23}\eta_{12} \cdot f\left(t_1 - \frac{2\,\ell - x_1}{v}\right) \end{aligned} \tag{4.62}$$

ここで $f(t, x)$ は電圧波を表す関数である。

演習問題 1.　図 4.22 のように，長さ ℓ，特性インピーダンス Z，進行波の伝播速度 v なる線路に，$t = 0$ で直流電圧 E を加えた。$R = Z$ として，点 A および B の電圧，e_A，e_B の時間変化を求めよ。ただし $T = \ell/v$ とする。

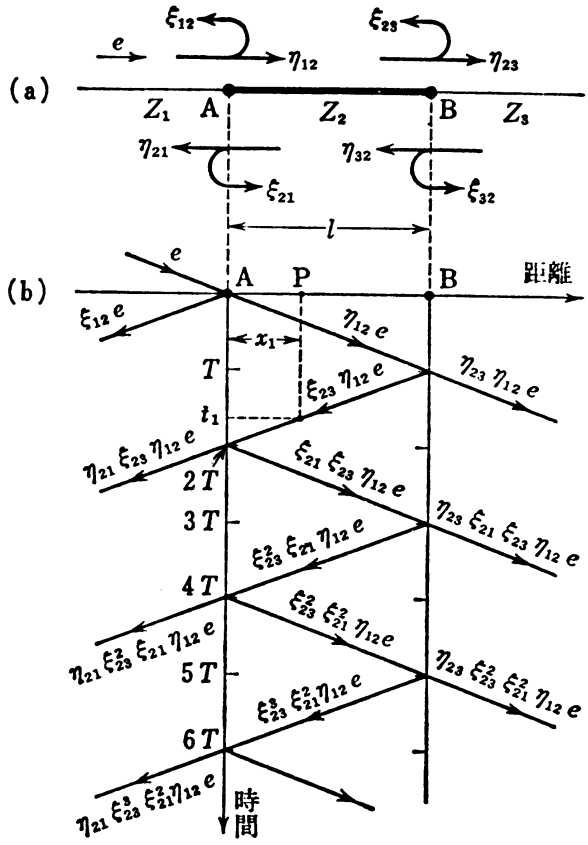

図 4.21: 格子図

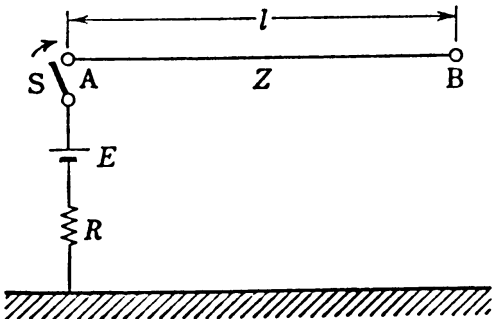

図 4.22: 有限長線路でのパルスの伝播

略解　スイッチ S を閉じたとき，線路を伝播し始める入射波の波高値 e は

$$e = \frac{Z}{Z+R}E = 0.5E$$

一方，線路端 B は開放されているので，ここでの電圧反射係数は

$$\xi_B = \frac{\infty - Z}{Z+\infty} = 1$$

この反射波が線路端 A に戻ってくるが，ここでは整合終端 $(Z = R)$ になっているので，電圧の反射係数は

$$\xi_A = \frac{R-Z}{Z+R} = 0$$

したがって，格子図を描くと図 4.23(a) にようになる。これより，線路の両端子 A および B の電圧 e_A，e_B は図 4.23(b) のように変化する。この図からわかるように，進行波が一往復した後，線路は電圧 E に充電される。

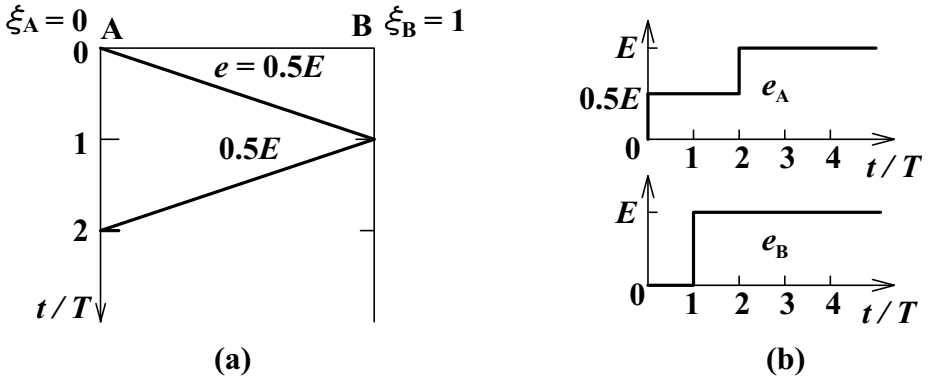

図 4.23: 演習問題 1 に対する (a) 格子図，(b) 線路端の電圧波形

演習問題 2.　図 4.22 の抵抗が $R = 0$ の場合について，点 A および B の電圧，e_A，e_B の時間変化を求めよ。

略解　スイッチ S を閉じたとき，線路を伝播し始める進行波の波高値は E である。

一方，線路終端 B は開放されているので，ここでの電圧反射係数は

$$\xi_B = \frac{\infty - Z}{Z+\infty} = 1$$

この反射波が線路端 A に戻ってくるが，ここでは短絡 $(R = 0)$ されているので，電圧の反射係数は

$$\xi_A = \frac{0-Z}{Z+0} = -1$$

したがって，格子図を描くと図 4.24(a) にようになる。これより，線路の端子 A および B の電圧 e_A，e_B は図 4.24(b) のように変化する。この図からわかるように，線路終端 B の電圧波形は，入力波形と全く異なったものになっている。

このように，内部インピーダンスの低い信号源から，入力インピーダンスの高い受信端に線路を通して信号を送る場合には，注意が必要である。

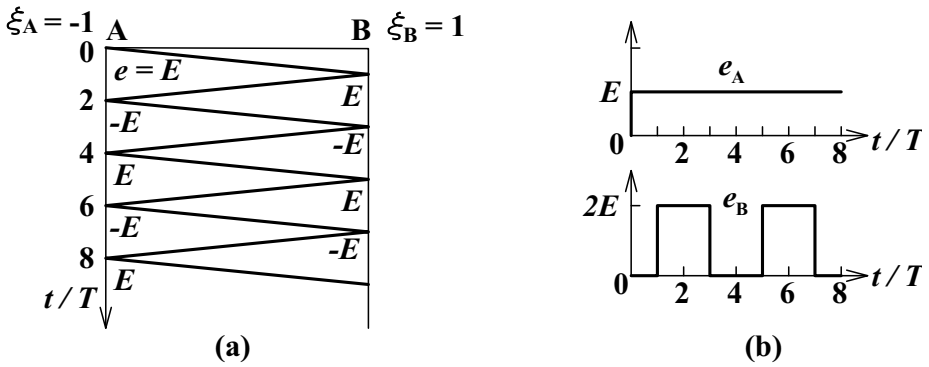

図 4.24: 演習問題 2 に対する (a) 格子図，(b) 線路端の電圧波形

索 引

アドミタンス, 9, 11

位相, 1
位相速度, 41
位相面, 41
インダクター, 3, 4, 10
インダクタンス, 5, 22, 39, 41
インピーダンス, 9, 11, 19, 24

右進波, 41

オイラーの公式, 2
オームの法則, 3

角周波数, 1
過渡現象, 40
完全反射, 49

キャパシタンス, 4
境界条件, 42, 48
共役整合, 37
キルヒホッフの法則, 13

結合係数, 7, 33

格子図, 57
交流電力, 21
交流特性, 8
コンダクタンス, 3, 12
コンデンサー, 3, 9

左進波, 41
サセプタンス, 11

磁気エネルギー, 47
磁束, 4, 5
実効値, 1, 26
実数係数線形微分方程式, 14

周期, 1, 21, 40
終端, 48
集中定数回路, 40, 51
周波数, 1, 40
受動素子, 3
瞬時電力, 21
初位相, 1, 19
初期条件, 42
進行波, 42, 47
振幅, 1

正弦波交流, 1
整合, 49
静電エネルギー, 47
静電容量, 4, 39, 41
接続点, 53, 57
線路, 47

相互インダクタンス, 6, 31

ダランベールの解, 41

調相, 29

抵抗, 3, 11, 21
定常解, 16
電圧降下, 12, 27
電圧降下率, 28
電圧波, 39, 41
伝送損失, 28
伝播速度, 39

透過係数, 57
等価抵抗, 27
透過波, 53
同軸線, 44
特性インピーダンス, 42, 53

2 導体系の基本式, 42
入射波, 48

波動方程式, 41
反射係数, 57
反射波, 48, 53

皮相電力, 26
比透磁率, 43
微分, 17
微分方程式, 16
比誘電率, 43, 46

複素共役, 15
複素振幅, 3
複素正弦波交流, 3
複素電力, 25, 26
複素表現, 3, 12, 17
複素表示, 9, 14
分布定数回路, 39

閉回路, 13
平均電力, 22, 23
平行導線, 43
平面導体, 39, 44
変成器, 3, 6, 31
偏微分, 41
偏微分方程式, 41

鳳-テブナンの定理, 51

マクロストリップライン, 45

無効電力, 26

漏れインダクタンス, 34

有効電力, 26

リアクタンス, 11
理想変成器, 35

励磁インダクタンス, 34
レンツの法則, 5