

1.2 電流による静磁界とインダクタンス

1.2.1 アンペアの周回積分の法則

図 1.9 のような閉曲線 C に鎖交する電流の和 ΣI は、その閉曲線上の磁界の強さ H の線積分で与えられる。

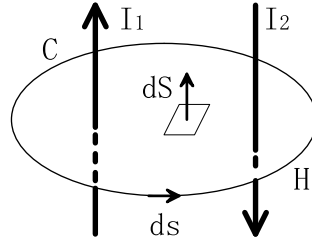


図 1.9: アンペアの周回積分

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \Sigma I \quad (1.39)$$

これは媒質の種類に無関係に成り立ち、電流と磁界の方向は右ネジの法則に従う。

また、電流密度を $\mathbf{J}$ 、閉曲線 C で囲まれる面の微小面積素を dS とするとストークスの定理 (Stokes' Theorem) により

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \int_S \nabla \times \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.40)$$

ここで、 $(\nabla \times)$ は回転を表す。一方

$$\Sigma I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.41)$$

であるから

$$\int_S \nabla \times \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.42)$$

したがって、微分形は次式で表される。

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (1.43)$$

1.2.2 ビオ-サバル (Biot-Savart) の法則

図 1.10 に示すような微小電流素 $I d\mathbf{s}$ による点 P の磁界の強さ dH は線素 $d\mathbf{s}$ から点 P に至るベクトルを $\mathbf{r}$ とすると

$$dH = \frac{I d\mathbf{s} \sin \theta}{4\pi r^2} = \left| \frac{I d\mathbf{s} \times \mathbf{r}}{4\pi r^3} \right| \quad (1.44)$$

で与えられ、方向は $d\mathbf{s}$ と $\mathbf{r}$ がつくる平面に垂直で、右ネジの法則に従うことが、Biot と Savart により実験で示された。ただし θ は $d\mathbf{s}$ と $\mathbf{r}$ のなす角である。

閉曲線 C に沿って流れる電流 I によって、点 P に生じる磁界の強さ H は周回積分により

$$\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi} \oint_C \frac{d\mathbf{s} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (1.45)$$

で与えられる。

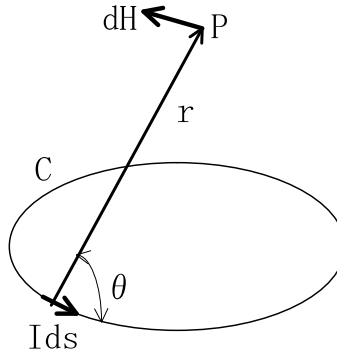


図 1.10: ビオ-サバルの法則

1.2.3 磁束密度

透磁率 μ によって

$$B = \mu H \quad (1.46)$$

で定義される B を磁束密度 という。真空の透磁率は $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ [H/m] である。

1.2.4 電流による静磁界の例

ビオ-サバルの法則を用いると、任意の電流分布による磁界を求めることができる。

また、対称性のある電流分布の場合には、アンペアの法則 (1.39) を用いると簡単に磁界を求めることができる。以下に、例を示す。

線状電流による磁界の強さ

(a) 半径 a の無限長直線導線に沿って流れる電流 I によって、線の中心より距離 r にある点 P に生じる磁界の大きさは、軸対称を考慮して式 (1.39) より

$$H = \frac{I}{2\pi r} \quad (r \geq a) \quad (1.47)$$

である。

(b) 図 1.11 のように、有限長直線導線に沿って電流 I が流れているとき、任意の点 P に生じる磁界は ビオ-サバルの法則を用い、 $r = a \operatorname{cosec} \theta$ 、 $\ell = a \cot \theta$ 、 $d\ell = -a \operatorname{cosec}^2 \theta d\theta$ の関係式を利用すると、式 (1.44) より

$$dH = -\frac{I \sin \theta}{4\pi a} d\theta \quad (1.48)$$

となるので

$$H = -\frac{I}{4\pi a} \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} \sin \theta d\theta = \frac{I}{4\pi a} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) \quad (1.49)$$

で、磁界の方向は無限長の場合と同じである。

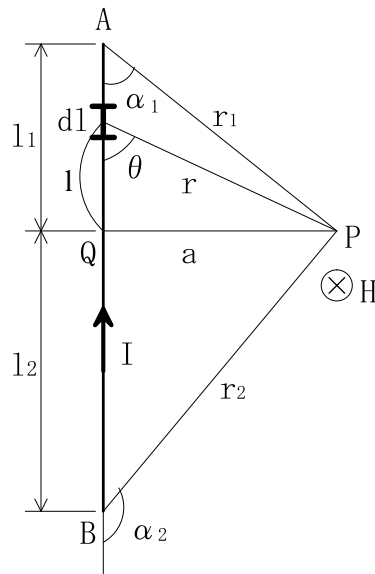


図 1.11: 有限長直線導線

円形コイルによる中心軸上の磁界の強さ

図 1.12 のような半径 a なる円形コイルに沿って流れる電流 I によって、その中心軸上で、

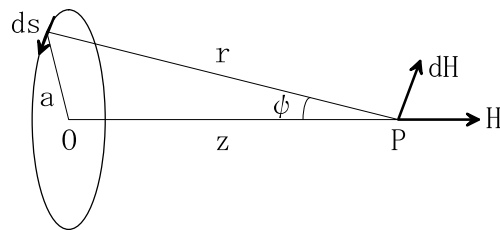


図 1.12: 円形コイル

円の中心より z の距離にある点に生じる磁界を求める。磁界は軸方向成分だけであるから、ビオ - サバルの法則を用いると、P 点での磁界の z 方向成分は

$$dH_z = \frac{Ids}{4\pi r^2} \sin \varphi \quad (1.50)$$

である。ところで

$$\sin \varphi = \frac{a}{r}, \quad r^2 = a^2 + z^2 \quad (1.51)$$

であるから

$$dH_z = \frac{Ids}{4\pi(a^2 + z^2)} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + z^2}} \quad (1.52)$$

したがって

$$\begin{aligned}
 H &= \oint_0^{2\pi a} dH_z \\
 &= \oint_0^{2\pi a} \frac{aI}{4\pi(a^2 + z^2)^{3/2}} ds \\
 &= \frac{a^2 I}{2(a^2 + z^2)^{3/2}}
 \end{aligned} \tag{1.53}$$

単層円筒ソレノイドによる中心軸上の磁界の強さ

図 1.13 のような半径 a , 長さ ℓ , 単位長さ当たりの巻き数が n である単層円筒ソレノイドに流れる電流 I によって, その中心軸上に生じる磁界を求める。

1 つの円形コイルによる軸方向磁界は式 (1.53) で与えられる。ところで

$$r = \sqrt{a^2 + z^2}, \quad \frac{a^2}{a^2 + z^2} = \sin^2 \theta \tag{1.54}$$

であり, dz 部分を通る電流は $nIdz$ であるから, この部分からの寄与は

$$dH = \frac{nI}{2r} \sin^2 \theta dz \tag{1.55}$$

ここで $z = a \cot \theta$, $a = r \sin \theta$ であるから

$$dz = -a \frac{d\theta}{\sin^2 \theta} = -\frac{r}{\sin \theta} d\theta \tag{1.56}$$

を用いると

$$dH = -\frac{1}{2} nI \sin \theta d\theta \tag{1.57}$$

したがって

$$\begin{aligned}
 H &= \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} dH = - \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{1}{2} nI \sin \theta d\theta \\
 &= \frac{nI}{2} (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1)
 \end{aligned} \tag{1.58}$$

$$= \frac{nI}{2} \left(\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} + \frac{\ell - x}{\sqrt{a^2 + (\ell - x)^2}} \right) \tag{1.59}$$

環状ソレノイドによる磁界の強さ

内外半径がそれぞれ a , b である図 1.14 のような円環に一樣に N 回巻いた導線に電流 I を流すと, N が十分大きいならば, 方位角方向の磁界が円環内部だけに生じ, その大きさは中心軸からの距離を r とすると

$$H = \frac{NI}{2\pi r} \quad (a < r < b) \tag{1.60}$$

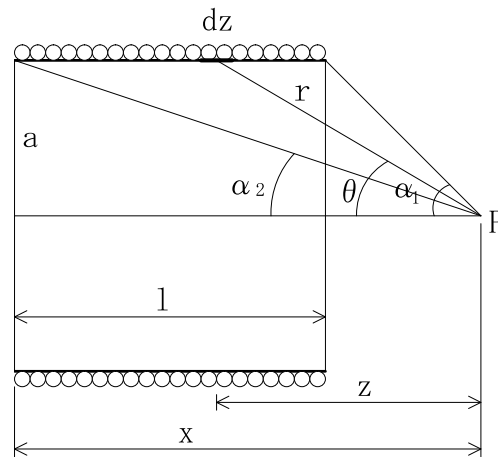


図 1.13: 単層円筒ソレノイド

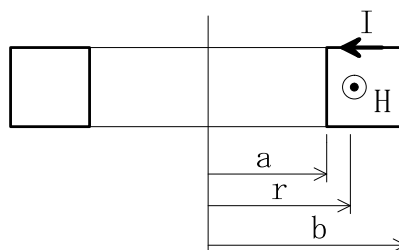


図 1.14: 環状ソレノイド

1.2.5 磁界中の電流に働く力

単位長の電流に働く力

磁束密度 B の磁界中にある単位長の電流に働く力 F_0 は

$$\mathbf{F}_0 = I \times \mathbf{B} \quad (1.61)$$

と表される。この力は電磁力と呼ばれ、電動機や計測機器などの装置に広く利用されている。

線状電流に働く力

式 (1.61) は単位長に働く力であるから、電流全体に働く力 F は、電流線素 ds に働く力をベクトル的に加えればよい。したがって

$$\mathbf{F} = \int (I \times \mathbf{B}) ds \quad (1.62)$$

導線の電流の値は各点で等しいので

$$I ds = I ds \quad (1.63)$$

と表される。したがって、式 (1.62) は

$$\mathbf{F} = I \int ds \times \mathbf{B} \quad (1.64)$$

となる。

導線に働く力

磁界中に置かれた導線に電流を流すと、電流は導線の外に出ることができないので、電流に働く力は導線に作用する。この力を利用した計測器の一つがテスターで、その指示機構部は図 1.15 に示すようになっている。すなわち、永久磁石で作られ、一様な磁界が得られように工夫された間隙にコイルが置かれており、このコイルに流れる電流に働く電磁力によりコイルを回転させている。コイルに働く電磁力は電流の大きさに比例しているので、コイルの回転角からコイルを流れる電流値を知ることができる。

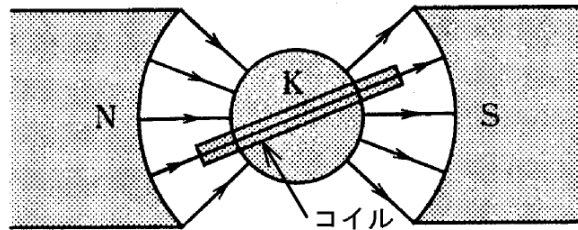


図 1.15: テスターの指示機構部

ピンチ効果

距離が d だけ離れた、無限に長い互いに平行な二つの直線状電流に働く力を考える。それぞれの電流値を I_1, I_2 とする。 I_1 により I_2 の電流の位置に生じる磁束密度は式 (1.46), (1.47) より

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} \quad (1.65)$$

と表される。ここで、磁界の向きは右ねじの方向で、 I_2 と直交する。

したがって、電流 I_2 の単位長さあたりに働く力 F は式 (1.61) より

$$F = I_2 B_1 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} \quad (1.66)$$

と表される。式 (1.66) は I_1, I_2 に関して対称であるから、電流 I_1 に働く力も同じ大きさであるが、向きは I_2 に働く力と逆方向である。結局、電流 I_1, I_2 の向きが同じときは、式 (1.66) の大きさの吸引力が働く。もし、電流が互いに逆方向に流れるときには、力の向きも逆になるので、この場合は反発力が働くことになる。

特別の場合として、 $I_1 = I_2 = 1 \text{ A}$ 、 $d = 1 \text{ m}$ の場合には

$$F = \frac{\mu_0}{2\pi} = 2 \times 10^{-7} \quad [\text{N/m}] \quad (1.67)$$

の力が働く。

同じ方向に流れる電流同士は互いに引き合う。このため、電流を流している導体にも収縮力が働く。したがって、自由に動くことができる導体、例えば導電性の液体や気体プラズマに電流を流すと、この力によって導体が収縮する。これをピンチ効果と呼び、プラズマの磁気閉じ込め等において重要な役割を担っている。

1.2.6 電磁誘導とインダクタンス

ファラデー (Faraday) の法則

図 1.16 のように，ある回路に鎖交する磁束 ϕ が時間的に変化すると，その変化を妨げる方向に逆起電力が誘起され，その大きさは

$$e = -\frac{d\phi}{dt} \quad (1.68)$$

である。これを誘導電圧という。

$$\phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.69)$$

であるので，上式は

$$e = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.70)$$

一方，導線 C に沿う電界 (誘導電界) を $\mathbf{E}$ とすれば，

$$e = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \quad (1.71)$$

静電界の場合と異なり，誘導電界の場合には周回電圧が得られるので，同じ経路を複数回，周回すれば，周回数に比例した電圧が得られる。これが，変圧器の原理である。

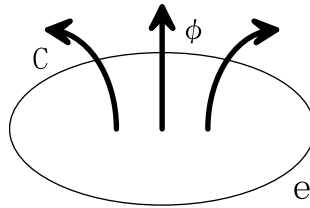


図 1.16: 電磁誘導

式 (1.71) にストークスの定理を用いると

$$e = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_S \nabla \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.72)$$

が得られる。上式と式 (1.70) とから

$$\int_S \nabla \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.73)$$

が得られるので，微分形では

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.74)$$

ただし，ここでは導線の空間的な移動は考えていない。

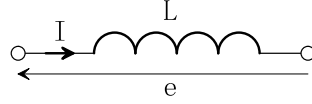


図 1.17: 自己インダクタンス

自己インダクタンス

自己誘導によって生じる起電力 e は、電流を I とし、図 1.17 に示す電流、電圧の向きを用いると

$$e = L \frac{dI}{dt} \quad (1.75)$$

と表される。 L は回路の幾何学的形状や透磁率によって決まる定数で、自己インダクタンスという。

上式と式 (1.68) より

$$\phi = LI \quad (1.76)$$

また、蓄えられるエネルギーは

$$U_M = \int_0^I e i dt = \int_0^I L \frac{di}{dt} i dt = \frac{1}{2} LI^2 \quad (1.77)$$

である。これは磁界のエネルギーとして空間に蓄えられており

$$U_M = \int \frac{\mu H^2}{2} dr^3 \quad (1.78)$$

自己インダクタンスの直並列接続

自己インダクタンス L_1, L_2 のインダクターを図 1.18 のように直列接続したときの合成インダクタンス L_s は、電流を I 、それぞれのインダクターの電圧を e_1, e_2 とすると

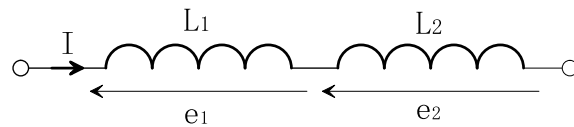


図 1.18: インダクターの直列接続

$$\left. \begin{aligned} e &= L_s \frac{dI}{dt} = e_1 + e_2 \\ e_1 &= L_1 \frac{dI}{dt}, \quad e_2 = L_2 \frac{dI}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (1.79)$$

であるから

$$L_s = L_1 + L_2 \quad (1.80)$$

また、自己インダクタンス L_1, L_2 のインダクターを図 1.19 のように並列接続したときの合成インダクタンス L_p は、全電流を I 、それぞれのインダクターの電流を I_1, I_2 、電圧を e とすると

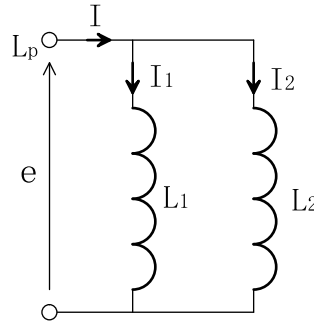


図 1.19: インダクターの並列接続

$$\left. \begin{aligned} I &= I_1 + I_2 \\ e &= L_p \frac{dI}{dt} = L_1 \frac{dI_1}{dt} = L_2 \frac{dI_2}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (1.81)$$

である。したがって

$$\frac{dI}{dt} = \left(\frac{dI_1}{dt} + \frac{dI_2}{dt} \right) = \left(\frac{L_p}{L_1} + \frac{L_p}{L_2} \right) \frac{dI}{dt} \quad (1.82)$$

より

$$\frac{L_p}{L_1} + \frac{L_p}{L_2} = 1$$

が得られるので

$$L_p = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} \quad (1.83)$$

相互インダクタンス

図 1.20 のように，2つの回路があって，回路 C_2 の電流 I_2 が時間的に変化し，それによって回路 C_1 の鎖交磁束数 ϕ_{12} が変化するとき， C_1 に誘起される起電力 e_1 は

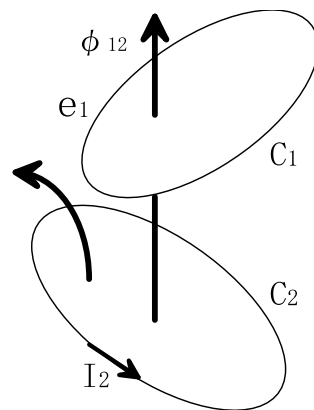


図 1.20: 結合回路

$$e_1 = -\frac{d\phi_{12}}{dt} = -M_{12} \frac{dI_2}{dt} \quad (1.84)$$

と表される。 M_{12} は回路の幾何学的形状および相対位置や媒質の透磁率によって決まる定数で、 C_1 の C_2 に対する相互インダクタンスという。

この場合にも

$$\phi_{12} = M_{12}I_2 \quad (1.85)$$

が成り立つ。

また、相互インダクタンスで結ばれた図 1.21 の回路では

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= L_1 \frac{dI_1}{dt} + M \frac{dI_2}{dt} \\ V_2 &= M \frac{dI_1}{dt} + L_2 \frac{dI_2}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (1.86)$$

が成り立つ。

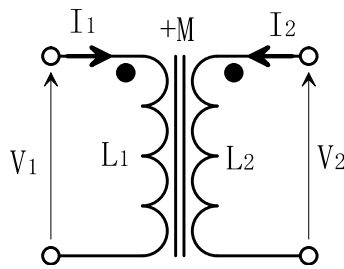


図 1.21: 相互インダクタンス結合回路

インダクタンスの求め方

(a) 鎖交磁束数 ϕ が求められるときは

$$L = \frac{\phi}{I} \quad (1.87)$$

$$M_{12} = \frac{\phi_{12}}{I_2} \quad (1.88)$$

(b) 磁気エネルギー U_M が求められるときは

$$L = \frac{2U_M}{I^2} \quad (1.89)$$

なお、空間に蓄えられる磁界のエネルギーは

$$U_M = \int \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}}{2} dr^3 = \int \frac{\mu H^2}{2} dr^3 \quad (1.90)$$

自己インダクタンスの計算例を表 1.2 に示す。

表 1.2: 自己インダクタンスの例

形状	規格	自己インダクタンス	条件
直線導線	半径 a 長さ ℓ	$\frac{\mu\ell}{2\pi} \left(\ln \frac{2\ell}{a} - 1 \right)$	表面電流 $\ell \gg a$
平行往復導線	長さ ℓ 断面半径 a, b 間隔 d	$\frac{\mu\ell}{2\pi} \ln \frac{d^2}{ab}$	表面電流
円筒ソレノイド	長さ ℓ ソレノイドの半径 a 全巻数 N	$\mu\pi \left(\frac{N}{\ell} \right)^2 a^2 (\sqrt{\ell^2 + a^2} - a)$	$\ell \gg a$
環状ソレノイド	断面半径 a 円環半径 b	$\mu N^2 (b - \sqrt{b^2 - a^2})$	
円環状導線	断面半径 a 円環半径 b	$\mu b \left(\ln \frac{8b}{a} - 2 \right)$	表面電流

内部インダクタンス

表 1.2 では表面電流を仮定しているが，導体内部を電流が流れている場合には，内部インダクタンスを考える必要がある。半径 a の導線内部に一様に電流 I が流れている場合には，断面の中心より r の距離における磁界は

$$H = I \frac{\pi r^2}{\pi a^2} \frac{1}{2\pi r} = \frac{Ir}{2\pi a^2} \quad (1.91)$$

で与えられるので，導線の透磁率を μ とすれば，単位長さ当たりの内部磁気エネルギー U_i は

$$U_i = \int_0^a \mu \frac{H^2}{2} 2\pi r dr = \frac{\mu I^2}{4\pi a^4} \int_0^a r^3 dr = \frac{\mu I^2}{16\pi} \quad (1.92)$$

したがって，式 (1.89) より，単位長さ当たりの内部インダクタンス L_i は

$$L_i = \frac{\mu}{8\pi} \quad (1.93)$$

となる。