エネルギー科学原論
電磁気学と回路理論

堀田栄喜 (ehotta@es.titech.ac.jp)
東京工業大学

April 2008
Version 2.00

目 次

第1章　電磁気と回路素子

1.1　一様誘電体中の静電界と静電容量

1.1.1　クーロンの法則

電荷間に働く力について，実験的につぎの法則が見出された。すなわち「電荷間の力は，その方向は両電荷を結ぶ直線上にあり，その大きさは電荷量の積に比例し，距離の二乗に反比例する。」

これを式で書くと，q_1，q_2 をそれぞれの電荷，r を両者間の距離として，その間に働く力 F は

$$F \propto \frac{q_1 q_2}{r^2} \tag{1.1}$$

となる。これを**クーロンの法則**と名付け，この法則によって発生する力を**クーロン力**と呼んでいる。

また，q_1，q_2 に符号を含ませると，同符号のときは反発力，異符号のときは吸引力になり，図 1.1 のように表すことができる。

式 (1.1) はクーロンが実験により示したが，実験の精度には限界があり，厳密にクーロンの法則が成り立つかどうかは不明である。しかし，静電気学に関する種々の現象や法則は全てクーロンの法則で説明でき，実際と理論とが極めて良く一致する。この一つの法則により全ての現象を説明できるため，現在，クーロンの法則は厳密に成り立つものとされている。

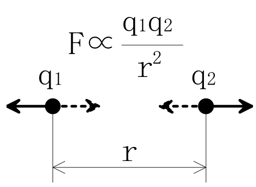

図 1.1: 電荷間の力

SI 単位系では

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q_1 q_2}{r^2} \tag{1.2}$$

と表わす。ただし ε は**誘電率**である。**真空の誘電率**は $\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$ [F/m] である。

また，電子の電荷は -1.602×10^{-19} [C] である。

1.1.2　電界と電位

電界 $\boldsymbol{E}$ 内の 1 点に単位電荷を置いたとき，これにはたらく力をその点の**電界の強さ**という。すなわち，電荷 q に働く力 $\boldsymbol{F}$ は

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E} \tag{1.3}$$

と表される。

また，その点の**電位**は，無限遠点からその点まで正の単位電荷を運ぶのに要する仕事と等しい。すなわち電界内の 1 点 P における電位 V_P は次式で与えられる。

$$V_P = -\int_{\infty}^{P} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{s} \tag{1.4}$$

2 点 A，B 間の電位差は，A から B へ正の単位電荷を運ぶのに要する仕事に等しく，次式で表される。

$$V_B - V_A = -\int_{A}^{B} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{s} \tag{1.5}$$

これらを微分形で表せば

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V \tag{1.6}$$

である。ここで

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \tag{1.7}$$

は，ハミルトンの演算子 (**ナブラ**と読む) と呼ばれる。

点電荷による電界と電位

点電荷 q によって，そこから距離 r の点に生ずる電界は，式 (1.2)，(1.3) より

$$\boldsymbol{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon r^2} \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{r} \tag{1.8}$$

また，電位は上式を式 (1.4) に代入して

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon r} \tag{1.9}$$

これらの式より，空間電荷密度が ρ であるとき

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int \frac{\rho\,\boldsymbol{r}}{r^3} dv \tag{1.10}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int \frac{\rho}{r} dv \tag{1.11}$$

と表されることがわかる。

1.1.3 ガウスの法則とポアソンの方程式

閉曲面 S 内に含まれる全電荷を Q としたとき，S 上の点における外向き法線方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とすれば，次式が成り立つ。

$$\oint_S \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n} dS = \frac{Q}{\varepsilon} \tag{1.12}$$

あるいは，体積電荷密度を ρ とすれば，式 (1.12) は次の微分形で表される。

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \tag{1.13}$$

これが**ガウス (Gauss) の法則**で，$(\nabla \cdot)$ は**発散**を表す。

ガウスの法則は以下のように証明できる。

図 1.2 のように微小電荷 ΔQ を取る。閉曲面 S 上の微小面積 ΔS を取り，ΔQ によるこの

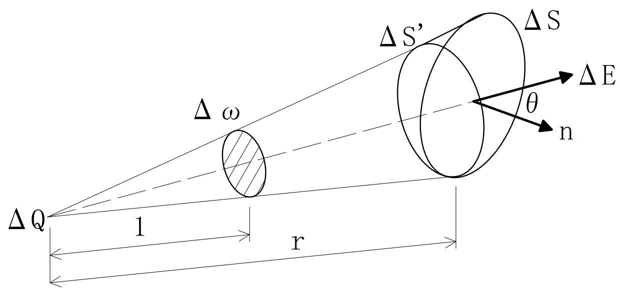

図 1.2: ガウスの法則の証明

点の電界を ΔE とすると式 (1.8) より

$$\Delta E = \frac{\Delta Q}{4\pi\varepsilon r^2} \tag{1.14}$$

である。また $\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n}$ は $\boldsymbol{E}$ の垂直成分であるから

$$(\Delta \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n})\Delta S = \Delta E \cos\theta \Delta S \tag{1.15}$$

である。一方，ΔQ を中心とする半径 r の球が，ΔS を底面とし ΔQ を頂点とする錐形を切り取る部分を $\Delta S'$ とすると

$$\Delta S' = \Delta S \cos\theta \tag{1.16}$$

であるから，式 (1.15) に式 (1.14)，(1.16) を代入すると

$$(\Delta \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n})\Delta S = \frac{\Delta Q}{4\pi\varepsilon} \frac{\Delta S'}{r^2} \tag{1.17}$$

ところで，$\Delta S'/r^2$ はこの錐形の囲む立体角に等しいので，これを $\Delta\omega$ とすれば

$$(\Delta \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n})\Delta S = \frac{\Delta Q}{4\pi\varepsilon} \Delta\omega \tag{1.18}$$

となる。すなわち，ΔS の積分への寄与は距離 r に無関係で，立体角のみに関係する。

したがって，式 (1.18) の左辺を閉曲面 S 全体について積分することは，右辺については ΔQ から見た全立体角を取ることに当たる。ΔQ が閉曲面 S 内にあれば，ΔQ から見た全立体角は 4π であるが，ΔQ が閉曲面の外にある場合には，ΔQ から見た全立体角は 0 であるので

$$\oint_S \Delta \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n} dS = \frac{\Delta Q}{\varepsilon} \tag{1.19}$$

が得られる。

面 S 内にある全電荷について積分すれば式 (1.12) が得られる。

また，式 (1.6)，(1.13) より，電位 V は次の**ポアソン (Poisson) の方程式**を満たす。

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{1.20}$$

誘電率 ε によって

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} \tag{1.21}$$

で定義される $\boldsymbol{D}$ を**電束密度**という。

式 (1.21) より，式 (1.12) は閉曲面から出ていく電束が閉曲面内の全電荷に等しいことを示している。

1.1.4 電界と電位の例

種々の形状の電荷分布に対する電界は，式 (1.10) を電荷分布に応じて積分すれば求めることができ，さらに，その電界分布より式 (1.4) あるいは式 (1.5) を用いて電位を求めることができる。実際には，電位はスカラーなので，電荷分布に応じて式 (1.11) により電位を求め，式 (1.6) より電界を求めた方が簡単である。

さらに，対称性のある電荷分布の場合には，式 (1.12) のガウスの定理により，簡単に電界を求めることができる。以下に，例を示す。

中空円筒面上の電荷による電界と電位

図 1.3 のように，半径 a に比べて非常に長い中空円筒面上に，単位長さ当たり ρ の電荷があるとき，中心軸から距離 r の点に生ずる半径方向電界 E_r と電位 V は

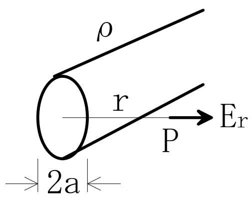

図 1.3: 中空円筒状電荷による電界

$$E_r = \begin{cases} \dfrac{\rho}{2\pi\varepsilon r} & (r \geq a) \\ 0 & (r \leq a) \end{cases} \tag{1.22}$$

$$V = \begin{cases} k - \dfrac{\rho}{2\pi\varepsilon}\ln r & (r \geq a) \\ k - \dfrac{\rho}{2\pi\varepsilon}\ln a & (r \leq a) \end{cases} \tag{1.23}$$

ただし k は積分定数である。

平板状の電荷による電界と電位

図 1.4 のように表面電荷密度が σ である平板状の電荷による電界は，平板からの距離に無関

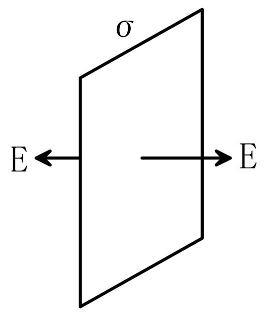

図 1.4: 平板状電荷による電界

係に一定かつ一様で

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon} \tag{1.24}$$

また電位は

$$V = k - \frac{\sigma}{2\varepsilon}x \tag{1.25}$$

ただし x は平板からの距離，k は積分定数である。

帯電導体表面近傍の電界と電位

図 1.5 のような帯電導体の電荷は表面にしか存在せず，導体表面は常に等電位面で，導体内

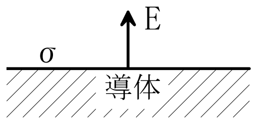

図 1.5: 帯電導体表面近傍の電界

部の電界は 0 である。表面電荷密度が σ である帯電導体表面近傍の電界は，導体からの距離に無関係に一定かつ一様で

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \tag{1.26}$$

また電位は

$$V = k - \frac{\sigma}{\varepsilon}x \tag{1.27}$$

ただし x は導体表面から外向き法線方向の距離，k は積分定数である。

1.1.5　静電容量

静電容量と蓄積エネルギー

静電容量 C は電荷 Q と電位 V を用いて，次式で与えられる。

$$C = \frac{Q}{V} \tag{1.28}$$

また，このとき蓄えられるエネルギーは

$$U_E = \int_0^Q V dq = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} C V^2 \tag{1.29}$$

である。これは電界のエネルギーとして空間に蓄えられており

$$U_E = \int \frac{\varepsilon E^2}{2} dr^3 \tag{1.30}$$

式 (1.28)，あるいは式 (1.29) および (1.30) より，静電容量が求められる。静電容量の計算例を表 1.1 に示す。

表 1.1: 静電容量の例

形　状	規　格	静電容量	条　件
導体球	半径 a	$4\pi\varepsilon a$	
同軸円筒導体	内半径 a，外半径 b，長さ ℓ	$\dfrac{2\pi\varepsilon\ell}{\ln\frac{b}{a}}$	外部円筒接地，$\ell \gg a, b$
平行導線	半径 a，長さ ℓ，間隔 d	$\dfrac{\pi\varepsilon\ell}{\ln\frac{d-a}{a}}$	$\ell \gg a$
平行導体板	板の面積 S，間隔 t	$\dfrac{\varepsilon S}{t}$	$S \gg t^2$

図 1.6 のようなコンデンサーを流れる電流 I とコンデンサーの端子電圧 V との関係は，コンデンサーに蓄えられる電荷を Q とすると

$$I = \frac{dQ}{dt} \tag{1.31}$$

であるから，これに式 (1.28) を代入して

$$I = C\frac{dV}{dt} \tag{1.32}$$

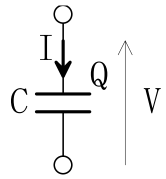

図 1.6: コンデンサーの端子電圧と電流

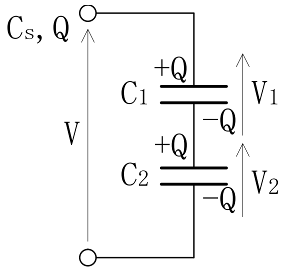

図 1.7: コンデンサーの直列接続

コンデンサーの直並列接続

静電容量 C_1，C_2 のコンデンサーを図 1.7 のように直列接続して電圧 V を印加したとき，合成容量 C_s に蓄えられる電荷 Q はそれぞれのコンデンサー電圧を V_1，V_2 として

$$\left.\begin{array}{l} Q = C_s V = C_1 V_1 = C_2 V_2 \\ V = V_1 + V_2 \end{array}\right\} \tag{1.33}$$

と表される。これより

$$V = V_1 + V_2 = \left(\frac{C_s}{C_1} + \frac{C_s}{C_2}\right) V$$

であるから

$$\frac{C_s}{C_1} + \frac{C_s}{C_2} = 1$$

が得られる。したがって

$$\frac{1}{C_s} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \tag{1.34}$$

あるいは

$$C_s = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \tag{1.35}$$

である。

式 (1.33) および (1.35) より，それぞれのコンデンサーが分担する電圧は

$$V_1 = \frac{C_2}{C_1 + C_2} V, \quad V_2 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} V, \quad \frac{V_2}{V_1} = \frac{C_1}{C_2} \tag{1.36}$$

となる。したがって，静電容量の小さなコンデンサーの方に，大きな電圧が印加されることになるので，コンデンサーを直列接続する場合には注意が必要である。

また，静電容量 C_1，C_2 のコンデンサーを図 1.8 のように並列接続したときには，コンデンサーの電圧を V として，それぞれのコンデンサーに蓄えられる電荷 Q_1，Q_2，および合成容量

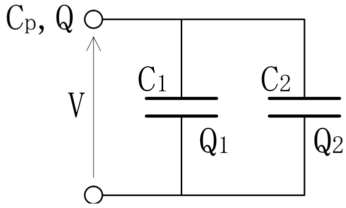

図 1.8: コンデンサーの並列接続

C_p に蓄えられる電荷 Q は

$$\left.\begin{array}{l} Q = C_p V = Q_1 + Q_2 \\ Q_1 = C_1 V, \qquad Q_2 = C_2 V \end{array}\right\} \tag{1.37}$$

と表されるので

$$C_p = \frac{Q}{V} = \frac{Q_1 + Q_2}{V} = C_1 + C_2 \tag{1.38}$$