3　極限解析法と極限平衡法

3.1　（固体）力学の問題の解が満たすべき条件

- 力のつり合い条件
- 変形の適合条件（変位ーひずみ関係）
- 材料特性（材料の構成関係：応力ーひずみ関係，破壊規準等）
- 力（応力）の境界条件
- 変位の境界条件

一般に，地盤構造物の破壊問題では，
これら全てを満足する「正解」を得ることは困難

ⓒAkihiro Takahashi 2008

3.2 地盤構造物の破壊問題でよく用いられる解析法

- 極限平衡法（解の性質が不明なものが多い）
- 極限解析法（上界法・下界法）
- すべり線法（不完全下界法）
- 有限要素法（変位によって定式化されていれば，上界法）

ここでは，極限解析法と極限平衡法について学ぶ
本講義で取り扱う土圧，支持力，斜面安定の問題
→ 境界条件が異なるだけで，同じ道具で計算可能（なはず）

ⓒAkihiro Takahashi 2008

3.3 極限解析とは

- 地盤の弾性変形は十分小さく無視できるものとみなして，
  これを剛塑性体として取り扱う（剛塑性境界値問題）.
- 前述のすべての条件を満足する「正解」を得ることは困難なため，
  いくつかの条件を満足する解（上界値・下界値）を求め，
  正解の範囲を狭める
- 極限定理（上界定理・下界定理）に基づき，ある境界条件下に
  おける固体の限界強度を求める解析のことを極限解析という
  $\leftrightarrow$ 極限平衡法（極限つりあい法とも言う）
- 極限解析に必要な事項について以下に概説

ⓒAkihiro Takahashi 2008

3.4 仮想仕事 (率) の原理

- ある外力 $\boldsymbol{F}$ のもとでつり合い状態にある系の内部に，
  内力 $\boldsymbol{\sigma}$ が生じているとする
- そこに仮想の変位 $\delta\boldsymbol{u}$ を与えると，
  それに伴って内部にひずみ $\delta\boldsymbol{\varepsilon}$ が生じる
- これらが次のような関係を満たすとするのが
  仮想仕事の原理である：$\boldsymbol{F}\delta\boldsymbol{u} = \int_V \boldsymbol{\sigma}\delta\boldsymbol{\varepsilon}dV$
- もっと一般的に書けば：$\int_S \boldsymbol{t}\delta\boldsymbol{u}dS + \int_V \boldsymbol{b}\delta\boldsymbol{u}dV = \int_V \boldsymbol{\sigma}\delta\boldsymbol{\varepsilon}dV$
  （左辺第 1 項は表面力による，第 2 項は物体力による仕事）

ⓒAkihiro Takahashi 2008

3.5 最大塑性仕事の原理

- 塑性ひずみ速度 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ が規定されたとき，
  これと関連する応力 $\boldsymbol{\sigma}$ によってなされる塑性仕事率 $\boldsymbol{\sigma}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ は，
  降伏条件を破らない任意の応力 $\boldsymbol{\sigma}^*$ によってなされる
  塑性仕事率 $\boldsymbol{\sigma}^*\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ より小さくならない：$(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}^*)\,\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \geq 0$
- 関連流れ則と降伏曲面の凸性は，上記の原理から導き出される
  - 関連流れ則：
    ある材料の降伏条件を満たす応力 $\boldsymbol{\sigma}$ の条件が
    $f(\boldsymbol{\sigma}) = 0$ で与えられるとき（これを降伏曲面という），
    $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ の方向は降伏面の外向き法線方向に一致する：$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda}\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$

©Akihiro Takahashi 2008

3.6 極限定理

- 「仮想仕事率の原理」と「最大塑性仕事の原理」より，
以下のような「上界定理」と「下界定理」が成立：

上界定理： ある 許容速度場 が見出されるとき，
この速度場とこれに対応する荷重による外部塑性仕事率は，
この速度場と正解荷重による外部塑性仕事率を下回らず，
許容速度場に対応する荷重は，上界値 を与える

下界定理： 降伏条件を破らない，ある 可容応力場 が見出されるとき，
正解速度場と可容応力場を満足する荷重による外部塑性仕事率は，
正解速度場と正解荷重による外部塑性仕事率を上回らず，
可容応力場を満足する荷重は，下界値 を与える

©Akihiro Takahashi 2008

上界定理

ある 許容速度場 が見出されるとき,
この速度場 $\delta \boldsymbol{u}^U$ とこれに対応する荷重 $\boldsymbol{F}^U$ による外部塑性仕事率は,
この速度場 $\delta \boldsymbol{u}^U$ と正解荷重 $\boldsymbol{F}^C$ による外部塑性仕事率を下回らず,
許容速度場に対応する荷重 $\boldsymbol{F}^U$ は, 上界値 を与える

$$\boldsymbol{F}^U \delta \boldsymbol{u}^U = \int_V \boldsymbol{\sigma}^U \delta \boldsymbol{\varepsilon}^U dV \geq \int_V \boldsymbol{\sigma}^C \delta \boldsymbol{\varepsilon}^U dV = \boldsymbol{F}^C \delta \boldsymbol{u}^U$$

○	変形の適合条件	?	力のつり合い条件
○	変位の境界条件	?	力（応力）の境界条件
○	材料特性（関連流れ則）		

ⓒAkihiro Takahashi 2008

下界定理

降伏条件を破らない，ある可容応力場が見出されるとき，
正解速度場 $\delta \boldsymbol{u}^C$ と可容応力場を満足する荷重 $\boldsymbol{F}^L$ による
外部塑性仕事率は，正解速度場 $\delta \boldsymbol{u}^C$ と正解荷重 $\boldsymbol{F}^C$ による
外部塑性仕事率を上回らず，可容応力場を満足する荷重 $\boldsymbol{F}^L$ は，
下界値を与える

$$\boldsymbol{F}^L \delta \boldsymbol{u}^C = \int_V \boldsymbol{\sigma}^L \delta \boldsymbol{\varepsilon}^C dV \leq \int_V \boldsymbol{\sigma}^C \delta \boldsymbol{\varepsilon}^C dV = \boldsymbol{F}^C \delta \boldsymbol{u}^C$$

○	力のつり合い条件	？	変形の適合条件
○	力（応力）の境界条件	？	変位の境界条件
○	材料特性（降伏条件）		

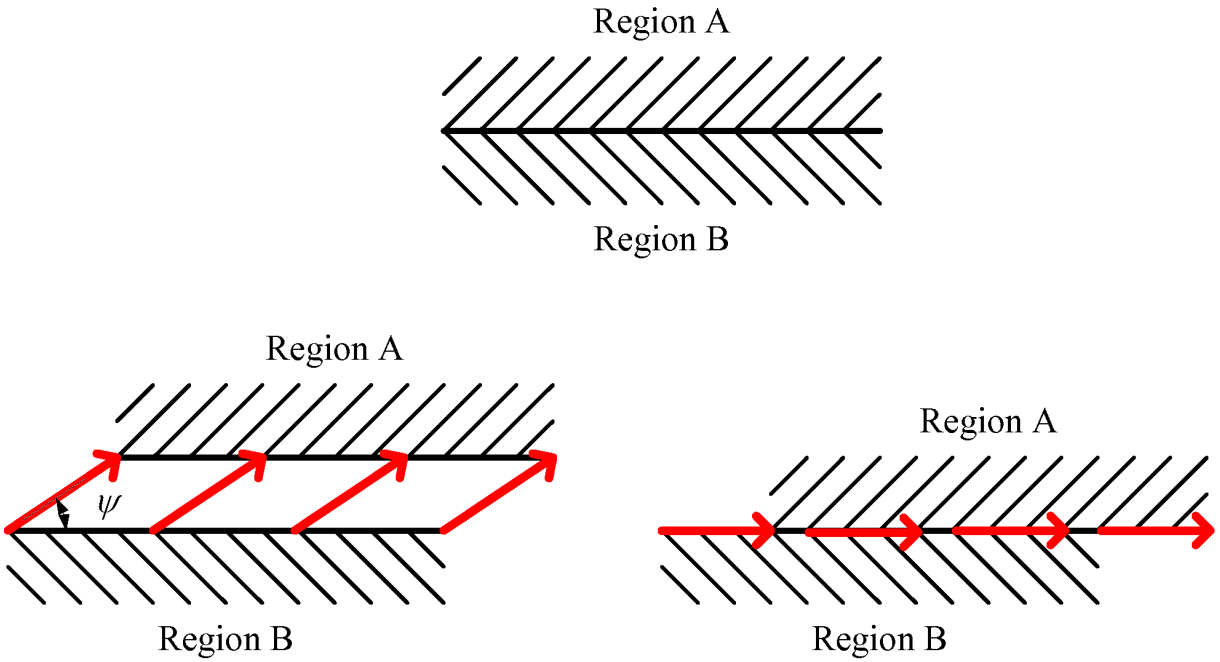
ⓒAkihiro Takahashi 2008

3.7 許容速度場

- 以下の条件を満たす変位（速度）場のこと：
  - 領域内部において，変形の適合条件（変位－ひずみ関係）を満足
  - 変位の境界条件を満足
- 剛塑性体を考え，かつ，簡便な計算法を考えているので，
  更に以下の条件も満足：
  - 領域は速度の不連続線で分割され，
    塑性変形は速度の不連続線においてのみ発生し，
    不連続線で囲まれた小領域は剛体的に運動
  - 塑性変形は関連流れ則を満足

ⓒAkihiro Takahashi 2008

速度の不連続線を介した 2 剛体領域の運動



(a) $\psi > 0$ (b) $\psi = 0$

(a) 排水条件下では，せん断抵抗角 $\phi > 0$ であり，せん断に伴い膨張する
その割合はダイレイタンシー角 ψ で表される（関連流れ則に従えば，$\psi = \phi$）

(b) 非排水条件下では，土の強度は $c = c_u, \phi = \phi_u = 0$ と表され，$\psi = 0$

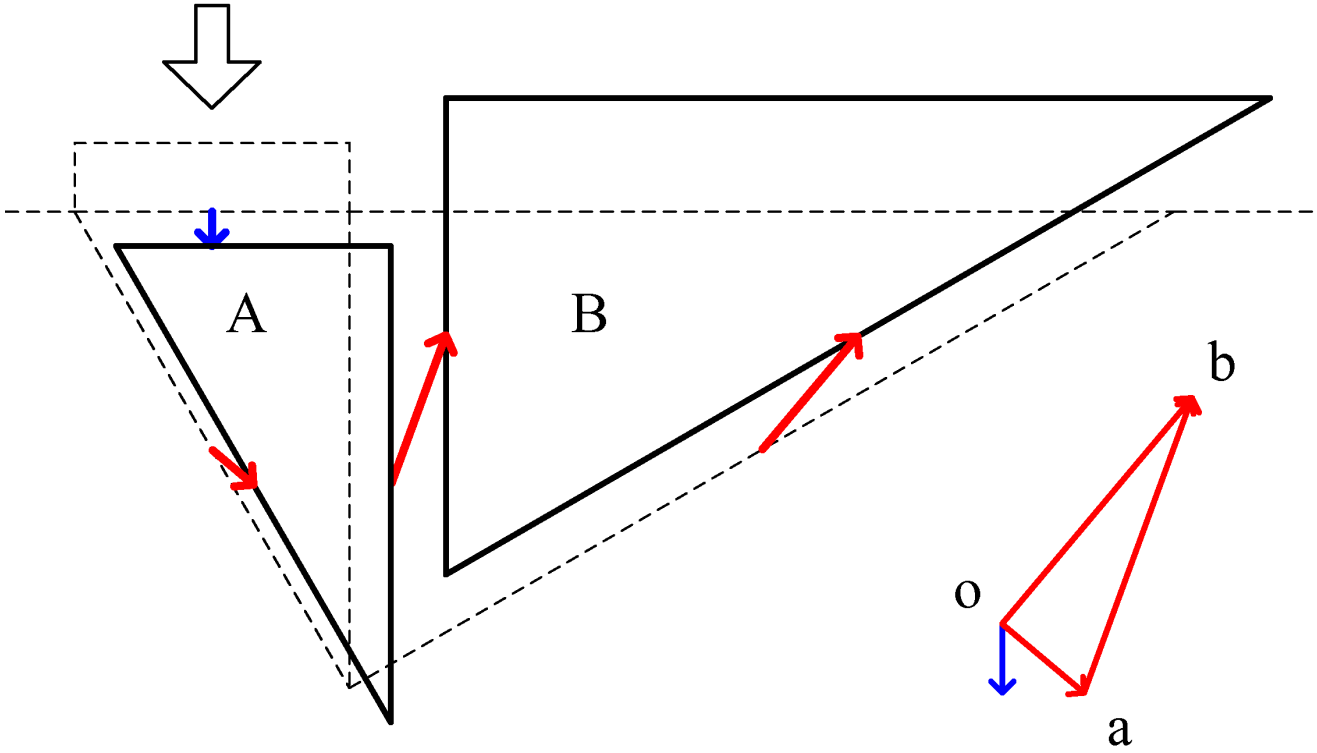
©Akihiro Takahashi 2008

許容速度場を求める

- 実験や実際の地盤構造物の観察事実より，破壊メカニズムを設定
- 破壊メカニズムを不連続線を介した，剛体ブロックの運動によって表現する．このとき，
  - 剛体ブロックの移動方向（速度方向）は，不連続線が関連流れ則に従ってせん断変形することを考慮して設定
  - 剛体ブロックの移動量（速度の相対的な大きさ）は，変形の適合条件（剛体ブロック同士が重なったり，離れたりしない）に基づき設定

ⓒAkihiro Takahashi 2008

許容速度場の例 ー 支持力問題を例に（１）

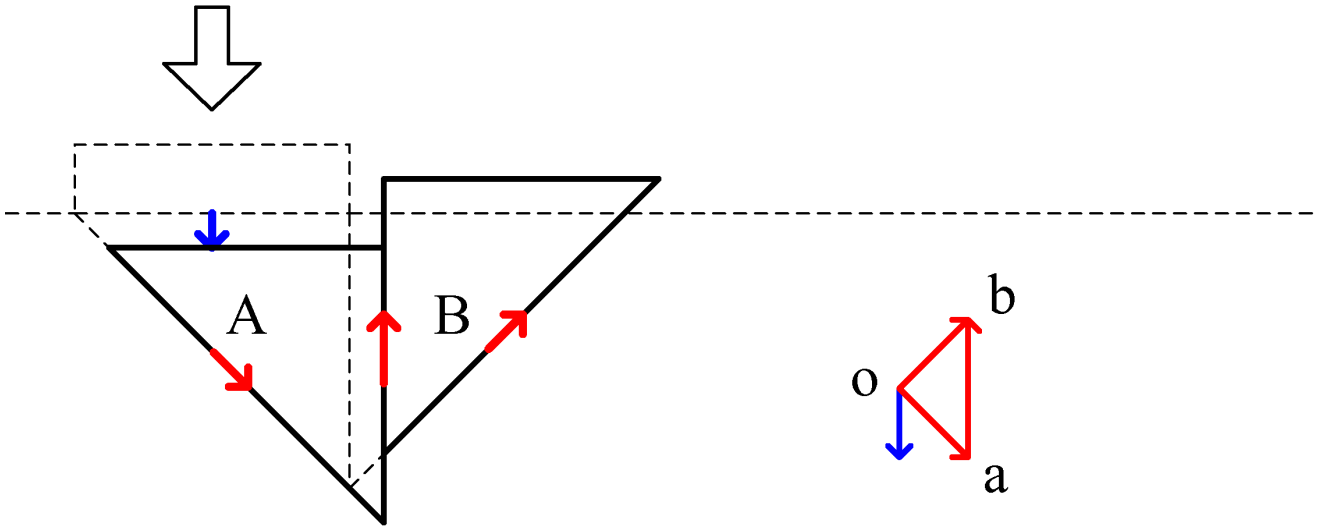


(a) $\psi > 0$

- 各速度の方向は，関連流れ則に従って設定（不連続線と ϕ の角度をなす）
- 各速度の大きさは，変形の適合条件によって設定

©Akihiro Takahashi 2008

許容速度場の例 ー 支持力問題を例に（２）



(b) $\psi = 0$

- $\phi = 0$ 時は，速度場を求めるのは簡単

ⓒAkihiro Takahashi 2008

内部消散率（$\int_V \boldsymbol{\sigma}^U \delta\boldsymbol{\varepsilon}^U dV$）

- 不連続線が直線で表されるとき，その単位長さあたりの内部消散率は $c\delta V \cos\psi$（δV は 2 剛体領域の相対速度）である
  関連流れ則に従えば，$\psi = \phi$
- $c = 0$ のときは内部消散率はゼロになる
  即ち，外部塑性仕事率もゼロに $\rightarrow$ 計算がとても楽に

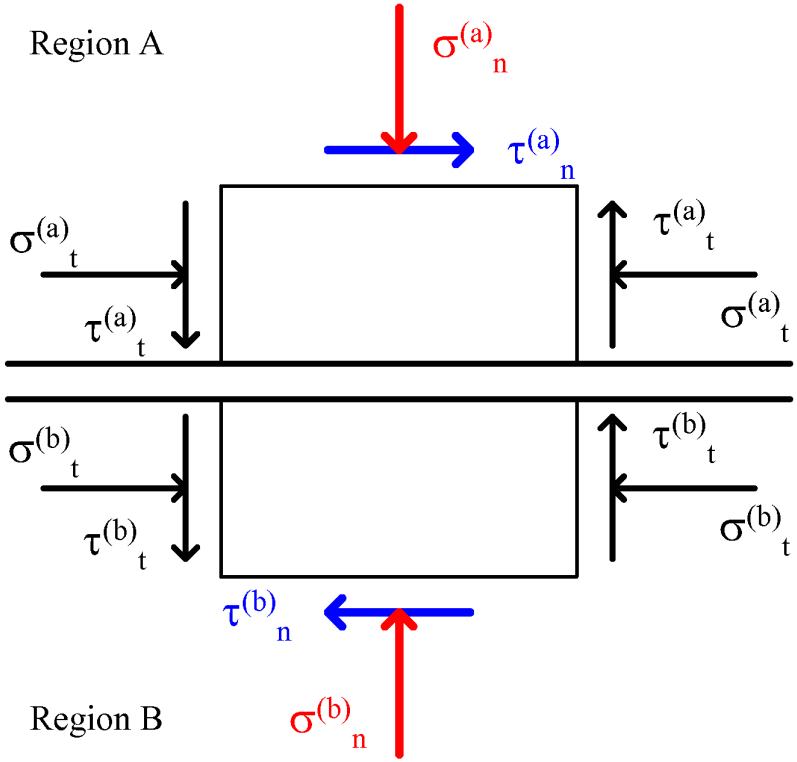
ⓒAkihiro Takahashi 2008

3.8 可容応力場

- 以下の条件を満たす応力場のこと：
  - 領域内部において，力のつりあい条件を満足
  - 応力の境界条件を満足
  - 全ての領域で降伏条件を破らない
- 剛塑性体を考え，かつ，簡便な計算法を考えているので，
  更に以下の条件も満足：
  - 領域は応力の不連続線で分割され，
    不連続線で囲まれた小領域内で応力分布は一様
  - 不連続線において力のつりあい条件を満足

ⓒAkihiro Takahashi 2008

応力の不連続線



- 下記の条件は満足している必要があるが，これ以外の応力成分については，つりあっている必要はない：

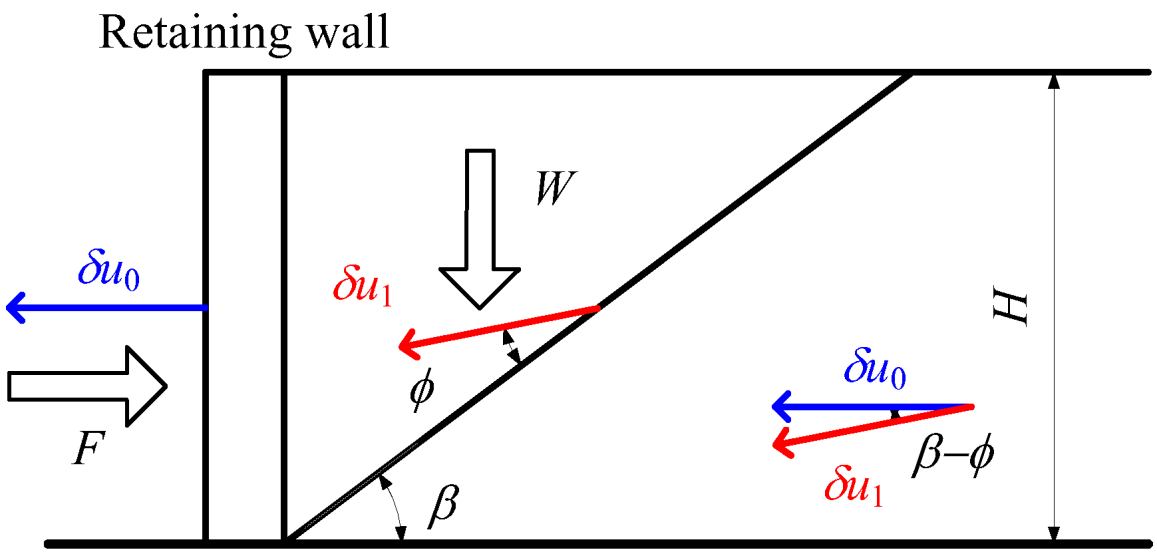
$$\sigma_n^{(a)} = \sigma_n^{(b)} \quad \tau_n^{(a)} = \tau_n^{(b)}$$

- モールの応力円を駆使して，不連続線による主応力方向の回転等を調べる

（支持力問題のように主応力方向が大きく変わる場合に必要）

©Akihiro Takahashi 2008

3.9 滑な壁面に作用する主働土圧の算定（上界値）



外部塑性仕事率は $\delta W_{\text{ext}} = \boldsymbol{F}^U \delta \boldsymbol{u}^U = \frac{1}{2}\rho g \frac{H^2}{\tan\beta}\delta u_1 \sin(\beta - \phi) - F\delta u_0$ で，

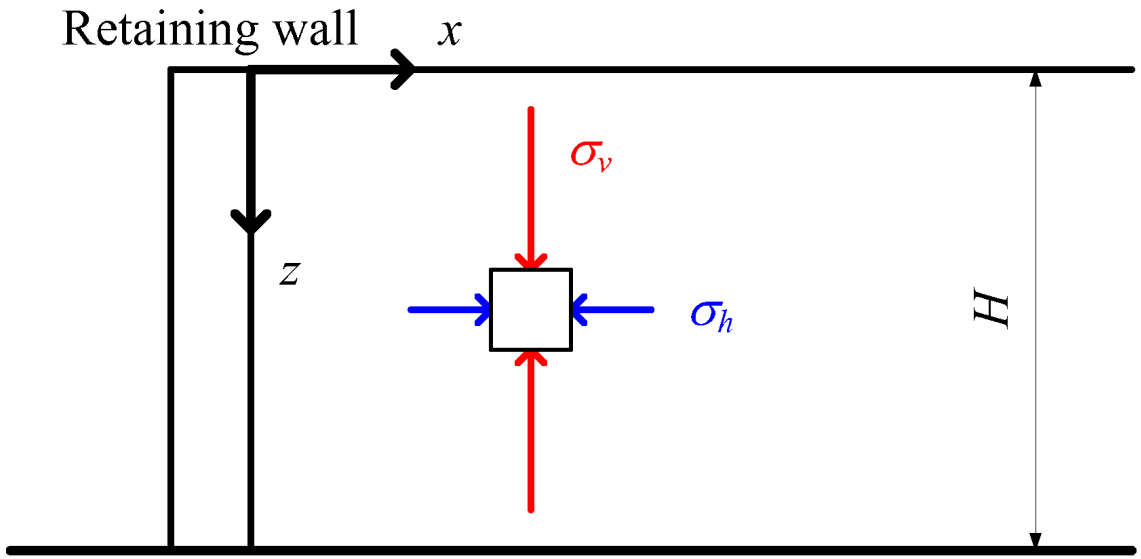
内部消散率は $\delta W_{\text{int}} = \int_V \boldsymbol{\sigma}^U \delta \boldsymbol{\varepsilon}^U dV = c\frac{H}{\sin\beta}\delta u_1 \cos\phi$ なので，

$\delta W_{\text{ext}} = \delta W_{\text{int}}$ から，$\beta = \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}$ とおけば（このとき F 最小），

主働土圧の上界値は $F = \frac{1}{2}\rho g H^2 \frac{1-\sin\phi}{1+\sin\phi} - 2cH\frac{\cos\phi}{1+\sin\phi}$

ⓒAkihiro Takahashi 2008

3.10 滑な壁面に作用する主働土圧の算定（下界値）



深さ z における鉛直応力は $\sigma_v = \rho g z$ と表せ（最大主応力），

モール・クーロンの破壊規準に内接するよう水平応力 σ_h を求めると，

$\sigma_h = \frac{1-\sin\phi}{1+\sin\phi}\rho g z - 2c\frac{\cos\phi}{1+\sin\phi}$ となることから，

下界値は $F = \frac{1}{2}\rho g H^2 \frac{1-\sin\phi}{1+\sin\phi} - 2cH\frac{\cos\phi}{1+\sin\phi}$ （$=$ 上界値 $=$ 正解）

ⓒAkihiro Takahashi 2008

3.11　極限解析法と極限平衡法の違い

- 極限解析法（上界法・下界法）は,（固体）力学の問題の解が満たすべき条件のうち，いくつかが満足されていないが，その条件かで得られる解が，上界値若しくは下界値になることが保障されている
- 一方，極限平衡法（破壊のメカニズムが許容速度場を必ずしも満足せず，力のつりあいも満足しているか不明）から得られる解の性質は不明（上界？下界？それ以外？）
- だたし，経験に基づく裏づけが，極限平衡法を工学的に意味のあるものにしている
  - 言い換えれば，そのような裏づけがなければ，何を計算しているのか不明

ⓒAkihiro Takahashi 2008