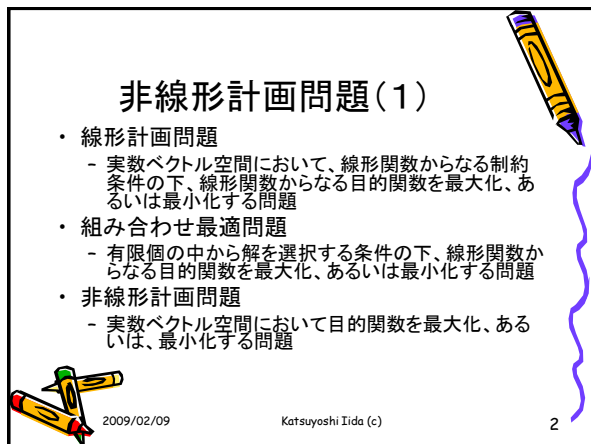




数理計画法E(第6学期) 第13回

担当: 飯田勝吉(いいだかつよし)
iida@gsic.titech.ac.jp

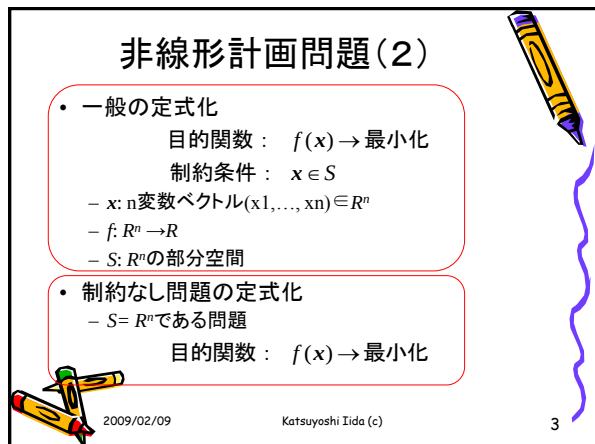
2009/02/09 Katsuyoshi Iida (c) 1



非線形計画問題(1)

- 線形計画問題
 - 実数ベクトル空間において、線形関数からなる制約条件の下、線形関数からなる目的関数を最大化、あるいは最小化する問題
- 組み合わせ最適問題
 - 有限個の中から解を選択する条件の下、線形関数からなる目的関数を最大化、あるいは最小化する問題
- 非線形計画問題
 - 実数ベクトル空間において目的関数を最大化、あるいは、最小化する問題

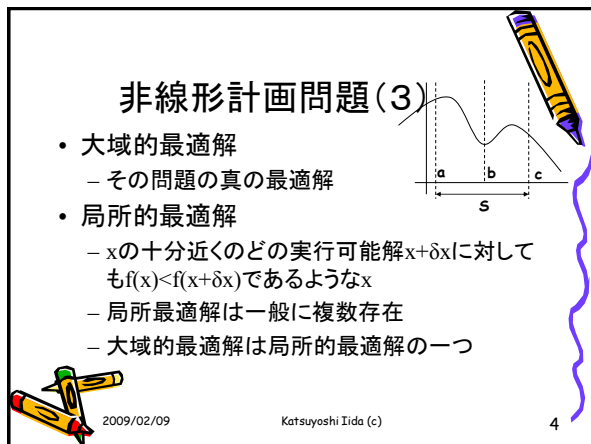
2009/02/09 Katsuyoshi Iida (c) 2



非線形計画問題(2)

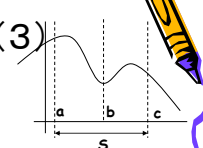
- 一般の定式化
 - 目的関数: $f(x) \rightarrow \text{最小化}$
 - 制約条件: $x \in S$
 - x : n 変数ベクトル $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$
 - $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$
 - S : $\mathbb{R}^n$ の部分空間
- 制約なし問題の定式化
 - $S = \mathbb{R}^n$ である問題
 - 目的関数: $f(x) \rightarrow \text{最小化}$

2009/02/09 Katsuyoshi Iida (c) 3

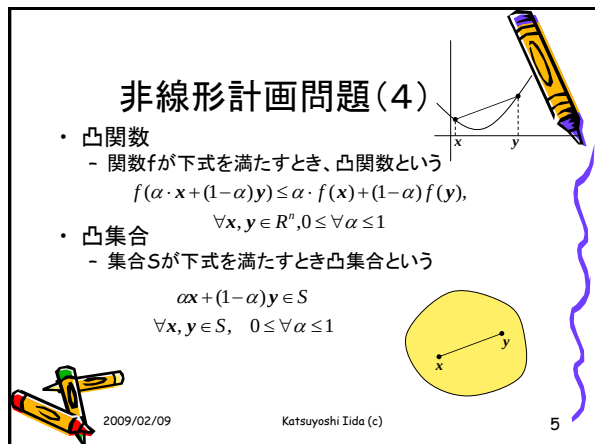


非線形計画問題(3)

- 大域的最適解
 - その問題の真の最適解
- 局所的最適解
 - x の十分近くでの実行可能解 $x + \delta x$ に対して $f(x) < f(x + \delta x)$ であるような x
 - 局所最適解は一般に複数存在
 - 大域的最適解は局所的最適解の一つ



2009/02/09 Katsuyoshi Iida (c) 4



非線形計画問題(4)

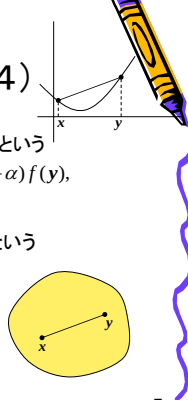
- 凸関数
 - 関数 f が下式を満たすとき、凸関数という

$$f(\alpha \cdot x + (1-\alpha)y) \leq \alpha \cdot f(x) + (1-\alpha)f(y),$$

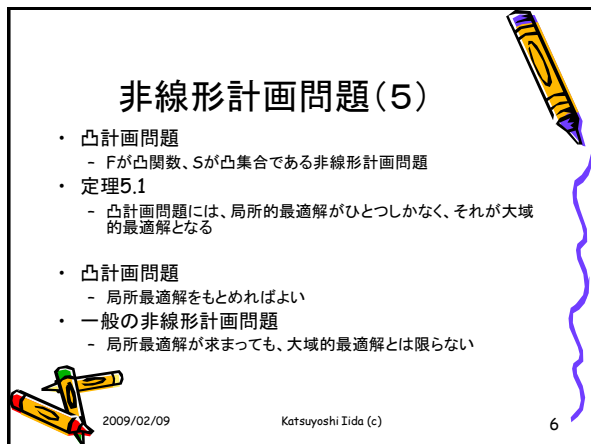
$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, 0 \leq \alpha \leq 1$$
- 凸集合
 - 集合 S が下式を満たすとき凸集合という

$$\alpha x + (1-\alpha)y \in S$$

$$\forall x, y \in S, 0 \leq \alpha \leq 1$$



2009/02/09 Katsuyoshi Iida (c) 5



非線形計画問題(5)

- 凸計画問題
 - F が凸関数、 S が凸集合である非線形計画問題
- 定理5.1
 - 凸計画問題には、局所的最適解がひとつしかなく、それが大域的最適解となる
- 凸計画問題
 - 局所最適解をもとめればよい
- 一般の非線形計画問題
 - 局所最適解が求まっても、大域的最適解とは限らない

2009/02/09 Katsuyoshi Iida (c) 6

非線形計画問題(6)

関数の勾配

- 点 $x=(x_1, \dots, x_n)$ における関数 $f(x)$ の勾配を次のベクトル $\nabla f(x)$ で表す

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \quad \dots \quad \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \right)^T$$

- これは点 x の近傍において、 f がもっとも増加する方向とその増加量を示す
- $f(x)$ の値が等しい x からなる線(面)を等高線(面)といい、勾配は等高線(面)と垂直になる

2009/02/09

Katsuyoshi Iida (c)

7

非線形計画問題(7)

ヘッセ行列

- $\nabla f(x)$ をさらに微分した下記の行列

$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{(\partial x_1)^2} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{(\partial x_2)^2} & \dots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(x)}{(\partial x_n)^2} \end{pmatrix}$$

2009/ ヘッセ行列は_____であり、点 x 付近の f の勾配状況を示す

非線形計画問題(8)

半正定値

- 任意のベクトル x に対して $x^T A x \geq 0$ となる行列 A
- A のすべての固有値が非負であることと等価

正定値

- 任意のベクトル $x \neq 0$ に対して $x^T A x > 0$ となる行列 A
- A のすべての固有値が正であることと等価

2009/02/09

Katsuyoshi Iida (c)

9

非線形計画問題(9)

制約なし問題の最適性条件

- 1次の必要条件

x^* が局所最適解であるためには、

$$\nabla f(x^*) = 0$$

(5.1)

でなければならない

- 2次の必要条件

x^* が局所最適解であるためには、式(5.1) かつ

$$\nabla^2 f(x^*) \text{が半正定値}$$

(5.2)

でなければならない

- 2次の十分条件

式(5.1)かつ

$$\nabla^2 f(x^*) \text{が正定値}$$

(5.3)

ならば、 x^* は局所最適解である

2009/02/09

Katsuyoshi Iida (c)

10

非線形計画問題(10)

式(5.1)

- 必要条件であるが十分条件ではないので、これを満たしても x^* が局所最適解であるとは限らない
- たとえば、鞍点、最大値などの停留点

式(5.3)

- 十分条件であって必要条件ではないので、局所的最適解であってもこの式をみたさないものがある

2009/02/09

Katsuyoshi Iida (c)

11

非線形計画問題(11)

問題の分類

- 制約なし問題・・・比較的やさしい
- 制約つき問題・・・困難
- 凸問題・・・・・・比較的易しい
- 一般の問題・・・・困難

2009/02/09

Katsuyoshi Iida (c)

12

非線形計画問題(12)

- 解法の分類
 - 制約なし問題
 - 最急降下法、ニュートン法、準ニュートン法
 - 制約つき問題
 - ペナルティ法、逐次二次計画法



2009/02/09

Katsuyoshi Iida (c)

13

期末試験範囲

- 線形計画問題
 - 標準形、基底解、シンプレックス法、感度分析など
- ネットワーク計画問題
 - 最短路問題、最大流問題、PERT
- 組み合わせ最適化問題
 - 欲張り法、分枝限定法、近似解法



2009/02/09

Katsuyoshi Iida (c)

14

期末試験条件

- 持ち込み不可
- 問題配分
 - 授業の穴埋め、課題レベルの問題
 - 85%
 - 上記より難易度が高い問題
 - 参考書の授業該当範囲の演習問題など
 - 15%



2009/02/09

Katsuyoshi Iida (c)

15