

数理計画法E(第6学期) 第10回

担当: 飯田勝吉(いいだかつよし)

iida@gsic.titech.ac.jp

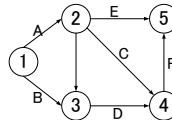
2009/01/19

Katsuyoshi Iida (c)

1

課題1の回答

- 表のプロジェクトのアローダイアグラムを作成し、最早開始時刻とプロジェクトの所要日数を求めよ。



アローダイアグラム

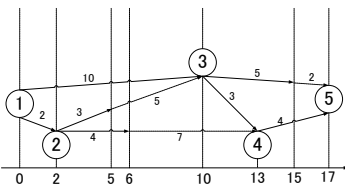
節点番号	最早開始時刻
2	4
3	6
4	9
5	11

2009/01/19

Katsuyoshi Iida (c)

2

課題2の回答



節点番号	V_i^c	V_i
1	0	0
2	2	7
3	10	10
4	13	13
5	17	17

作業名	全余裕	自由余裕
1,2	5	0
2,3	5	5
2,4	7	7
3,5	2	2

2009/01/19

3

組み合わせ最適化問題(1)

- 概要
 - 解ベクトルの各要素が離散的な値しかとらず、実行可能解の数が有限個に制限されている問題
 - 例: 最短路問題、枝数を m とすれば解ベクトルは高々 m 個しかない
 - 変数が整数のみを取ると言う条件で最適化を行う組み合わせ最適化法の一つ =

2009/01/19

Katsuyoshi Iida (c)

4

組み合わせ最適化問題(2)

- 問題:
 - 変数の数が増えたときに解の数が爆発的に増えること
 - 例: 0,1のみをとる n 個の変数
 - $n=10$ →解の数 =
 - $n=30$ →解の数 =
 - $n=50$ →解の数 =
- 効率的なアルゴリズムの構築が必要
 - 手法: 問題の性質や構造を利用

2009/01/19

Katsuyoshi Iida (c)

5

組み合わせ最適化問題(3)

- 欲張り法
 - アルゴリズムの途中過程で、近視眼的なローカル最適化を行うことで、問題全体のグローバル最適化を行おうとする方法の総称
 - 欲張り法の適用範囲は限られている
- 分枝限定法
 - 解空間の全ての候補を総当たりで探索する際に、不必要な枝を先に刈り取ることで、計算量を削減する方法
- 動的計画法 (dynamic programming)
 - 問題全体の解を求めるために、小さい問題の最適解を求め、次第に拡張していく方法
- 近似解法 (heuristic methods)
 - 最適解の探索が困難な問題に利用する方法

2009/01/19

Katsuyoshi Iida (c)

6

欲張り法(1)

- アルゴリズムの途中過程で、近視眼的なローカル最適化を行うことで、問題全体のグローバル最適化を行おうとする方法
 - この方法の適用範囲は限られている
- 必ず最適解が求まる例:
 - 最小木問題 (minimum spanning tree problem)
 - あるグラフにおける最小の長さをもち、全ての節点を含む木を求めよ

2009/01/19

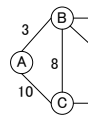
Katsuyoshi Iida (c)

7

欲張り法(2)

• 問題 4.1

- 下図のネットワークの最小木を求めよ。



最小木問題における欲張り法= _____

0. 枝を長さの短い順でソートする。枝 $e \in E$ の長さを a とすると
 $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_m$
 となる。 $T = \{e_1\}$, $k=2$ とする。

1. $T \cup \{e_k\}$ が閉路を含まないときに $T \leftarrow T \cup \{e_k\}$ とする。
2. T がスパニングツリーになっていれば終了、そうでなければ $k \leftarrow k+1$ として、1に戻る。

2009/01/19

Katsuyoshi Iida (c)

8

欲張り法(3)

- スパニングツリーの枝の本数は必ず _____ 本となるので、2. の判定は集合 T に含まれる枝数を数えるだけでよい。
- 次ページで実際に問題4.1を解く

2009/01/19

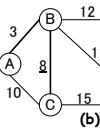
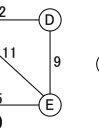
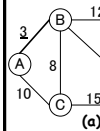
Katsuyoshi Iida (c)

9

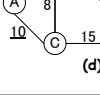
欲張り法(4)

• Step 0

- $\{e_1, \dots, e_7\} = \{(A,B), (B,C), (D,E), (A,C), (B,E), (B,D), (C,E)\}$



枝(A,C)を選択していない!



ここで枝数=4

2009/01/19

10

欲張り法(5)

- クラスカル法によって最小木が得られることを証明

全域森

ある与えられた(必ずしも連結していない)グラフにおいて、どの枝を加えても閉路が出来てしまう枝の集合を全域森という。一つのグラフにおいて全域森に属する枝の数は必ず $n-n'$ 本となる。ただし、 n' は全域森中の連結グラフ数。

- クラスカル法で得られる枝の集合 T は、閉路を含まず枝の本数は $n-1$ なので、 T は _____ である。 T 内の枝を T に組み込んだ順に並べたものを $\{e_{i_1} \leq e_{i_2} \leq \dots \leq e_{i_{n-1}}\}$ とすると、それらは _____ 順になっている。つまり

$$a_{i_1} \leq a_{i_2} \leq \dots \leq a_{i_{n-1}}$$

2009/01/19

Katsuyoshi Iida (c)

11

欲張り法(6)

- 次に与えられたグラフ $G=(V,E)$ に対する任意のスパニングツリー T^* を考え、 T とは別に存在すると仮定

- T^* 内の枝を長さの短い順に並べる→

$$a_{q_1} \leq a_{q_2} \leq \dots \leq a_{q_{n-1}} \quad (4.1)$$

- 仮定により下式を満たす r ($1 < r < n-1$) が存在

$$a_{i_1} \leq a_{q_1}$$

⋮

$$a_{i_{r-1}} \leq a_{q_{r-1}}$$

$$a_{i_r} > a_{q_r}$$

(ただし、枝の選択方法より $r \neq 1$)

$$(4.2)$$

2009/01/19

12

欲張り法(7)

- ここで下記の枝集合 T' を考える
 $T' = \{e_1, e_2, \dots, e_{i-1}, e_{q_i}, \dots, e_{q_r}\}$
 - T' には枝が重複して含まれる可能性があり、グラフ G' は連結グラフとは限らない
 - クラスカル法における T の構成法により、枝集合 $\{e_1, e_2, \dots, e_{i-1}\}$ は部分グラフ G' に対する全域森になっている。
 - なぜなら、そうでないとすると、(4.1)、(4.2)式よりクラスカル法の計算仮定で e_{q_i} のかわりにそれよりも短い $e_{q_1}, \dots, e_{q_r}$ のいずれかを付け加えたはずである。
 - 枝集合 $\{e_1, e_2, \dots, e_{q_r}\}$ が G' の全域森であることから、 G' は r 本以上の枝を持つ森を含まない
 - 一方 $\{e_{q_1}, \dots, e_{q_r}\}$ は G に対する全域木 T^* の一部分を構成する森であり、そのあだ数は r であるから矛盾する
 - すなわち、(4.2)式の仮定は誤りであり、 T は最小木となる

2009/01/19

Katsuyoshi Iida (c)

13

ナップザック問題(1)

- n 個のアイテムはそれぞれ重さが a_i であり、利用価値が c_i である。ナップザックには重さ b までしか入れられないとき、利用価値の和を最大にするにはどうすればよいか。

目的関数： $\sum_{i=1}^n c_i x_i \rightarrow \text{最大化}$

制約条件： $\sum_{i=1}^n a_i x_i \leq b$
 $x_i \in \{0, 1\}$

ナップザックにものを入れるとき1

2009/01/19

Katsuyoshi Iida (c)

14

ナップザック問題(2)

- この問題を欲張り法で解くことを考える
 - まず、アイテムを「単位重あたりの利用価値」の順に並べる

$$\frac{c_1}{a_1} \geq \frac{c_2}{a_2} \geq \dots \geq \frac{c_n}{a_n}$$
 - 欲張り法で解くには
 ものから順に重さの制限が許す限り入れていけばよい。

2009/01/19

Katsuyoshi Iida (c)

15

ナップザック問題(3)

- 下記の問題を考える。

目的関数： $7x_1 + 8x_2 + x_3 + 2x_4 \rightarrow \text{最大化}$
 制約条件： $4x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 6$
 $x_i \in \{0, 1\}$
- クラスカル法の解 $= (1, 0, 1, 0)$, $r=8$
- 最適解 $= (0, 1, 1, 0)$, $r=9$

2009/01/19

Katsuyoshi Iida (c)

16

欲張り法の弱みと強み

- 最小木問題では、最小化するために短い枝から順にとれられる方法(欲張り法)によって最適解の探索が可能
- ナップザック問題をはじめとする、多くの問題では最適解の探索が不能
- しかし、考え方が簡単で計算量が少ないため、近似解を得るために使われることがある

2009/01/19

Katsuyoshi Iida (c)

17

期末試験の範囲

- 線形計画問題
- ネットワーク計画法
- PERT
- 組み合わせ計画問題
- (非線形計画問題)

2009/01/19

Katsuyoshi Iida (c)

18