数理計画法E(第6学期)
第4回

担当:飯田勝吉(いいだかつよし)
iida@gsic.titech.ac.jp

この授業の構成(再改定)

- 1回・10/6(月)数理計画法とは
- 2回・10/16(木)線形計画法I
- 3回・10/20(月)線形計画法II
- 11/5(水)休講予定
- 11/10(月)休講予定
- 4回・11/17(月) 線形計画法III
- 5回・11/27(木) 線形計画法IV
- 6回・12/1(月)ネットワーク計画法I
- ・12/8(月)休講予定
- 7回・12/15(月)ネットワーク計画法II
- 8回・12/22(月)ネットワーク計画法III
- 9回・1/12(月)ネットワーク計画法IV
- 10回・1/19(月)整数計画法I
- 11回・1/26(月)整数計画法II
- 12回・2/2(月)整数計画法III
- 13回・2/9(月)非線形計画法I
- (補講日) 重要項目の復習
- ・2/16(月)試験

課題1

	x_1	x_2	x_3	x_4	
$-z$	−1/2	0	0	1/2	4
x_3	2*	0	1	−1	4
x_2	1/2	1	0	1/2	4

	x1	x2	x3	x4	
$-z$	0	0	1/4	1/4	5
x1	1	0	1/2	-1/2	2
x2	0	1	-1/4	3/4	3

最適解=(2,3,0,0)
目的関数の値=-5

(ピボット要素に*を付す)

課題2

	x_1	x_2	x_3	x_4	
$-z$	−1	−1	0	0	0
x_3	3*	2	1	0	12
x_4	1	2	0	1	8

	x_1	x_2	x_3	x_4	
$-z$	0	-1/3	1/3	0	4
x_1	1	2/3	1/3	0	4
x_4	0	4/3*	-1/3	1	4

課題1と同様の結果

	x_1	x_2	x_3	x_4	
$-z$	0	0	1/4	1/4	5
x_1	1	0	1/2	-1/2	2
x_2	0	1	-1/4	3/4	3

課題3

	x_1	x_2	x_3	x_4	
$-z$	−3	−2	0	0	0
x_3	2	1	1	0	6
x_4	1	2*	0	1	6

	x_1	x_2	x_3	x_4	
$-z$	−2	0	0	1	6
x_3	3/2*	0	1	-1/2	3
x_2	1/2	1	0	1/2	3

最適基底解=(2,2,0,0)
目的関数の値=−10

	x_1	x_2	x_3	x_4	
$-z$	0	0	4/3	1/3	10
x_1	1	0	2/3	-1/3	2
x_2	0	1	-1/3	2/3	2

課題4

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
$-z$	−6	−10	−3	0	0	0	0
x_4	4	8*	1	1	0	0	0
x_5	−1	3	2	0	1	0	0
x_6	0	1	0	0	0	1	1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
$-z$	−1	0	-7/4	5/4	0	0	0
x_2	1/2	1	1/8*	1/8	0	0	0
x_5	-5/2	0	13/8	-3/8	1	0	0
x_6	-1/2	0	-1/8	-1/8	0	1	1

シンプレックス法の
最適条件を満たす

最適基底解=(0,0,0,0,0,1)
目的関数の値=0

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
$-z$	6	14	0	3	0	0	0
x_3	4	8	1	1	0	0	0
x_5	-8	-13	0	-2	1	0	0
x_6	0	1	0	0	0	1	1

２段階法（1）

- シンプレックス法
  - 初期基底形式が必要
  - しかし、与えられた問題を標準化しても、それが基底形式であるとは限らない
  - 標準形から基底形式を得る方法が必要！

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
$-z$		0	0		0	
		1	0		0	
		0	0		1	
		0	1		0	

２段階法（2）

- 最右列に負の値がある場合
  - その行全体に＿＿＿＿＿＿＿＿ことによって、全ての最右列の値を非負にできる
- 単位行列が存在するがz行が非基底だけで表されていない場合
  - z行から＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿を引くことによって基底変数の係数を0にできる
- 単位行列が存在しない場合
  - どうする？

２段階法（3）

- 標準形の問題から基底形式に変換する方法

目的関数: $-2x_1 - x_2 - x_3 \to$ 最小化

制約条件: $x_1 + 2x_2 = 12$

$x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 20$

$x_1 \geq 0,\quad x_2 \geq 0,\quad x_3 \geq 0$

単位行列が存在しない！

	x_1	x_2	x_3	
$-z$	-2	-1	-1	0
	1	2	0	12
	1	4	3	20

２段階法（4）

- 初期基底形式を得るために解く問題＝＿＿＿＿＿＿＿＿
  - x_4, x_5を＿＿＿＿＿＿＿という

目的関数: $w = x_4 + x_5 \to$ 最小化

制約条件: $x_1 + 2x_2 + x_4 = 12$

$x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_5 = 20$

$x_1 \geq 0,\quad x_2 \geq 0,\quad x_3 \geq 0,\quad x_4 \geq 0,\quad x_5 \geq 0$

２段階法（5）

- 二つの問題の関係
  - 目的関数wは全ての人為変数の和
  - 人為変数も非負条件がついているので、wの最小値は＿＿＿＿である
  - 最適解wの値による分類
    - wの最小値が0
      - 人為変数の値が全て0になる。このとき、二つの問題の制約条件が等しくなる
    - wの最小値が0をとらない
      - 元の問題の実行可能解が存在しない

２段階法（6）

- 補助問題のタブロー表現

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
$-w$	0	0	0	1	1	0
	1	2	0	1	0	12
	1	4	3	0	1	20

・補助問題の作り方から必ず人為変数の列に単位行列が出現
・w行に他の行の定数倍を加えることによって変形

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
$-w$	-2	-6	-3	0	0	-32
	1	2	0	1	0	12
	1	4	3	0	1	20

２段階法（７）

- シンプレックス法で解くと

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
$-w$	0	0	0	1	1	0
x_1	1	0	-3	2	-1	4
x_2	0	1	3/2	$-1/2$	1/2	4

- 従って、最適解は＿＿＿＿＿＿＿＿で、wの最小値は＿＿＿＿＿となる。
- この最適解＝もとの問題の初期基底解

２段階法（８）

- つまり、基底形式で書いた元の問題

	x_1	x_2	x_3	
$-z$	-2	-1	-1	0
	1	0	-3	4
	0	1	3/2	4

- このように、補助問題をシンプレックス法で解き、得られた初期基底解を用いて本来の問題をシンプレックス法で解く方法を＿＿＿＿＿＿という。

２段階法（９）

(Step 1) 制約条件式の数だけ＿＿＿＿＿＿を導入し、その和wを最小化する補助問題を作る

(Step 2) 補助問題をシンプレックス法を用いて解く。目的関数が0にならなかったら、元の問題は実行可能解を持たない

(Step 3) 補助問題の最適解の基底に人為変数が含まれる場合、基底を変換して、基底から外す

(Step 4) 人為変数を全て0にして、元の問題の初期基底解とする

(Step 5)得られた初期基底解からシンプレックス法を用いることによって、元の問題を解く。

２段階法（１０）

- 注意：
  - Step3において、補助問題の最適解の基底に人為変数が含まれる場合
    - 退化している場合に発生することがある
    - 人為変数を追い出すピボット操作をする

例題１（１）

- 次の線形計画問題を2段階法を用いて解け

目的関数: $3x_1 + 2x_2 \to$ 最小化

制約条件: $2x_1 + x_2 + x_3 = 6$

$2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 10$

$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0$

単位行列が存在しない！

	x_1	x_2	x_3	
$-z$	3	2	0	0
	2	1	1	6
	2	3	2	10

例題１（２）

- Step1：人為変数を導入し補助問題を作る

目的関数: $w = x_4 + x_5 \to$ 最小化

制約条件: $2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6$

$2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_5 = 10$

$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0, \quad x_5 \geq 0$

例題1（3）

- Step2 補助問題を解き、元の問題の初期基底解を求める

	x1	x2	x3	x4	x5	
$-w$	0	0	0	1	1	0
	2	1	1	1	0	6
	2	3	2	0	1	10

この問題を解くと

	x1	x2	x3	x4	x5	
$-w$	0	0	0	1	1	0
x1	1	0	1/4	3/4	-1/4	2
x2	0	1	1/2	-1/2	1/2	2

例題1（4）

- 補助問題の解
  - 基底変数(x1, x2) = (2,2)
  - 非基底変数（x3, x4, x5) = (0,0,0)
  - 人為変数が全て非基底変数
- 元の問題の制約条件を補助問題の制約条件に置換

例題1（5）

	x1	x2	x3	
$-z$	3	2	0	0
	2	1	1	6
	2	3	2	10

元の問題

⇨

	x1	x2	x3	
$-z$	3	2	0	0
	1	0	1/4	2
	0	1	1/2	2

2段階目の初期基底解（の導出途中）

	x1	x2	x3	x4	x5	
$-w$	0	0	0	1	1	0
x1	1	0	1/4	3/4	-1/4	2
x2	0	1	1/2	-1/2	1/2	2

補助問題の解

例題1（6）

- 初期基底解を導出しシンプレックス法で解く

	x1	x2	x3	
$-z$	0	0	-7/4	-10
x1	1	0	1/4	2
x2	0	1	1/2*	2

初期基底解

最適解＝(1,0,4)
z=3

	x1	x2	x3	
$-z$	0	7/2	0	-3
x1	1	-1/2	0	1
x3	0	2	1	4

最適基底解

例題2（1）

目的関数: $3x_1 + 2x_2 \to$ 最小化
制約条件: $2x_1 + x_2 \geq 2$
$4x_1 + 3x_2 \geq 6$
$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$

Step 0: まず、スラック変数を導入し標準形に変換する

目的関数: $z = 3x_1 + 2x_2 \to$ 最小化
制約条件: $2x_1 + x_2 - x_3 = 2$
$4x_1 + 3x_2 - x_4 = 6$
$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0$

例題2（2）

Step 1: 初期基底解が得られていないので、補助問題を作る

目的関数: $w = x_5 + x_6 \to$ 最小化
制約条件: $2x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 2$
$4x_1 + 3x_2 - x_4 + x_6 = 6$
$x_i \geq 0, \quad (i = 1, \ldots, 6)$

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	
$-w$	0	0	0	0	1	1	0
	2	1	−1	0	1	0	2
	4	3	0	−1	0	1	6

例題2（3）

Step2：補助問題をシンプレックス法で解く

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
$-w$	0	0	0	0	1	1	0
x_1	1	3/4	0	-1/4	0	1/4	3/2
x_3	0	1/2	1	-1/2	-1	1/2	1

Step5：上記解から初期基底解をつくり、2段階目をシンプクレックス法で解く

	x_1	x_2	x_3	x_4	
$-z$	1/3	0	0	2/3	-4
x_2	4/3	1	0	-1/3	2
x_3	-2/3	0	1	-1/3	0

最適基底解

最適解＝(0,2,0,0)
z=4

元の問題の解：
x1=0, x2=2

課題

- 1．次の線形計画問題を解け

目的関数： $3x_1 + 2x_2 \to$ 最小化

制約条件： $2x_1 + x_2 + x_3 = 10$

$2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6$

$x_i \geq 0, \quad (i = 1, \ldots, 3)$

改訂シンプレックス法（1）

- シンプレックスタブロー
  - (m+1)×(n+1)の表であり、ピボット操作を行うときに全ての内容を書き換える
  - ピボット操作で必要な範囲は限られている
  - 以下、式を使って考える

改訂シンプレックス法（2）

- 制約条件

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{Nx}_N + \boldsymbol{Bx}_B = \boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{Nx}_N + \boldsymbol{Ex}_B = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$$

ただし、Bはm×mの行列で、
Nはm×(n-m)行列で、Eは単位行列

- 目的関数

$$z = f(x) = \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{c}_N^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N})\boldsymbol{x}_N$$

$$= \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{c}_N^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N})\boldsymbol{x}_N + \boldsymbol{0x}_B$$

改訂シンプレックス法（3）

- タブローとの関係
  - 制約条件部
    - 基底変数部分＝単位行列$\boldsymbol{E}$
    - 非基底変数部分＝$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}$
    - 最右列＝$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$
  - 目的関数部（z行）
    - 基底変数部分の上＝$\boldsymbol{0x}_b$
    - 非基底変数部分の上＝$(\boldsymbol{c}_N^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N})$
    - 最右列＝$\boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$

改訂シンプレックス法（4）

- 改訂シンプレックス法の手続き
  - ピボット列の選択：
    - $(\boldsymbol{c}_N^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N})$ の中に負の要素があれば、その中からピボット行を選択
  - ピボット行の選択
    - 行列$\boldsymbol{N}$の中でピボット行に対応する列を$\boldsymbol{a}'$とすると、タブロー中のピボット列は$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{a}'$となる。従って、$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{a}'$の要素と$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$の要素の比を計算し、最小を与える行をピボット行とする

改訂シンプレックス法（5）

- 改訂シンプレックス法の特徴
  - ピボット処理が表の一部分だけで可能
  - 計算量の削減可能→
    - しかし多項式時間アルゴリズムではない
- 線形計画問題の他の解法
  - 内点法
    - 多項式時間アルゴリズム
  - しかし十分にチューニングすれば、改訂シンプレックス法が実用的ということが知られている