

The slide features a large yellow diamond shape in the center. Inside the diamond, the text "数理計画法E(第6学期)" is written in red, followed by "第2回" in red. Below this, the text "担当: 飯田勝吉 (いいだかつよし)" is in black, with the email address "iida@gsic.titech.ac.jp" in green. A 3D pencil graphic is positioned at the top left corner of the yellow diamond, pointing towards the text. The bottom edge of the yellow diamond has a wavy blue line. The background outside the yellow diamond is white.

この授業の構成(訂正版)

・ 1回・10/6(月)数理計画法とは	・ 10回・1/12(月)整数計画法I
・ 2回・10/16(木)線形計画法I	・ 11回・1/19(月)整数計画法II
・ 3回・10/20(月)線形計画法II	・ 12回・1/26(月)整数計画法III
・ 11/5(水)休講予定	・ 13回・2/2(月)非線形計画法I
・ 11/10(月)休講予定	重要項目の復習
・ 4回・11/17(月)線形計画法III	
・ 5回・11/27(木)線形計画法IV	
・ 6回・12/1(月)ネットワーク計画法I	
・ 7回・12/8(月)ネットワーク計画法II	
・ 8回・12/15(月)ネットワーク計画法III	
・ 9回・12/22(月)ネットワーク計画法IV	



線形計画問題

- ・ 数理計画問題
 - 与えられた制約条件のもとで、目的関数を最小または最大とするような決定変数の値をみつけること
- ・ 線形計画問題
 - 変数の1次の等式または不等式で与えられた制約条件のもとで、変数の1次関数で与えられた目的関数を最大化(あるいは最小化)する問題

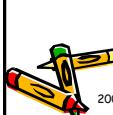
線形計画問題の講義の過程

- 第2回:
 - 標準形と基底形式
- 第3回:
 - シンプレックス法
- 第4回:
 - 2段階シンプレックス法
- 第5回:
 - 双対定理

標準形(1)		
(a) 注文量	(b) 生産量	(c) 輸送コスト
B1 70	A1 90	B1 4
B2 40	A2 80	B2 7
B3 60		B3 12
		A1 11
		A2 6
		B3 3

2008/10/16 Katsuyoshi Iida (c) 5



標準形(2)

- 工場Aiから取引先Bjへ輸送する量を x_{ij} (単位) とすると、この問題は

目的関数: _____ →最小化

制約条件: $x_{11} + x_{21} = 70$ $x_{11} + x_{12} + x_{13} = 90$

_____ _____

_____ _____

$x_{ij} \geq 0 \quad (i=1,2; j=1,2,3)$

2008/10/16 Katsuyoshi Iida (c) 6

標準形(3)

目的関数: $c^T x \rightarrow \text{最小化}$

制約条件: $Ax = b$

$$x \geq 0$$

のように表した問題を**標準形**という。

- ・ポイント1: 目的関数の最小化
- ・ポイント2: 制約条件第1式が等式
- ・ポイント3: 制約条件第2式が0ベクトル以上となる不等式

2008/10/16

Katsuyoshi Iida (c)

7

標準形(4)

・前回の問題を再掲

目的関数: $70x_1 + 120x_2 + 30x_3 \rightarrow \text{最大化}$

制約条件: $5x_1 + 6x_3 \leq 80$

$2x_2 + 8x_3 \leq 50$

$7x_1 + 15x_3 \leq 100$

$3x_1 + 11x_2 \leq 70$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$

標準形とは異なるのは

・目的関数の_____でなく_____。

・制約条件が_____でなく_____。

2008/10/16

Katsuyoshi Iida (c)

8

標準形(5)

- ・全ての線形計画問題→標準形に変換可
- ・変換ステップ1: 目的関数を_____する
- ・変換ステップ2: 新しい変数を導入する
- ・変換ステップ3: 非負条件を導くため、変数変換を行う。

2008/10/16

Katsuyoshi Iida (c)

9

標準形(6)

- ・変換ステップ1

- 目的関数の変換

・変換前

$$70x_1 + 120x_2 + 30x_3$$

・変換後

$$-70x_1 - 120x_2 - 30x_3$$

2008/10/16

Katsuyoshi Iida (c)

10

標準形(7)

- ・変換ステップ2
 - 新しい変数を導入し、不等式を等式に変換
 - 例: 制約条件1
 - ・変換前 $5x_1 + 6x_3 \leq 80$
 - ・新変数の導入 $x_4 = 80 - 5x_1 - 6x_3$
 - ・変換後 $5x_1 + 6x_3 + x_4 = 80, x_4 \geq 0$
 - 導入した変数の名称: **スラック変数**

2008/10/16

Katsuyoshi Iida (c)

11

標準形(8)

- ・標準形で書くと

$$\begin{aligned} x &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix}, \\ \text{目的関数: } c^T x &\rightarrow \text{最小化} \\ \text{制約条件: } Ax = b \\ x \geq 0 \end{aligned}$$

$$c = \begin{pmatrix} -70 \\ -120 \\ -30 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

目的関数: $c^T x \rightarrow \text{最小化}$

制約条件: $Ax = b$

$x \geq 0$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 15 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 11 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$b = \begin{pmatrix} 80 \\ 50 \\ 100 \\ 70 \end{pmatrix}$$

2008/10/16

Katsuyoshi Iida (c)

12

標準形(9)

- 変換ステップ3: 以下の問題を考える
目的関数: $-x_1 + 5x_2 \rightarrow \text{最小化}$

制約条件: $4x_1 - 6x_2 = 30$

$$2x_1 + 8x_2 - x_3 = 50$$

$$7x_1 + 5x_2 + x_4 = 10$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0$$

標準形と異なるところは

2008/10/16

Katsuyoshi Iida (c)

13

標準形(10)

- 非負条件のない変数一つにつき、非負条件のある二つの変数を導入し置き換える

例: $x_2 = x'_2 - x''_2$ とおくと

$$-x_1 + 5x'_2 - 5x''_2 \rightarrow \text{最小化}$$

$$4x_1 - 6x'_2 + 6x''_2 = 30$$

$$2x_1 + 8x'_2 - 8x''_2 - x_3 = 50$$

$$7x_1 + 5x'_2 - 5x''_2 + x_4 = 10$$

$$x_1 \geq 0, \quad x'_2 \geq 0, \quad x''_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0$$

標準形と異なるところは

2008/10/16

Katsuyoshi Iida (c)

14

標準形(11)

- 3つのステップにより、全ての線形計画問題を標準形に書き直すことができる。
- Q:なぜ、全ての線形計画問題を標準形に書き直すのか。
- A:解法の開発効率向上のため、および複数の線形計画問題間での比較を行いやすくするため。

2008/10/16

Katsuyoshi Iida (c)

15

幾何学的手法による解法 (決定変数=2)(1)

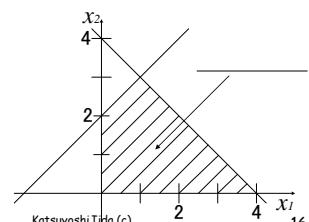
- 次の問題を考える(標準形にはしていない)

目的関数: $f(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2 \rightarrow \text{最大化}$

制約条件: $x_1 + x_2 \leq 4$

$$-x_1 + x_2 \leq 2$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$



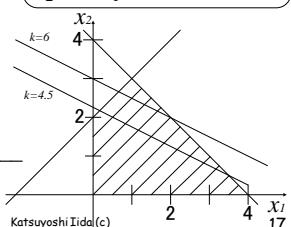
幾何学的手法による解法 (決定変数=2)(2)

問題を解くためには k を
させ平行移動する

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= x_1 + 2x_2 = k \\ x_2 &= -x_1/2 + k/2 \end{aligned}$$

x_2 切片が _____ より
大きくなると実行可能
領域との共通点が
なくなる。その時の実行
可能解は
 $(x_1, x_2) =$ _____

2008/10/16



幾何学的手法による解法(3) (決定変数=2)

- 目的関数の最大(または最小)値を与える実行可能解を**最適解**という。

・ポイント

- 最適解は、実行可能領域の一つの端点となる

2008/10/16

Katsuyoshi Iida (c)

18

幾何学的手法による解法(4) (決定変数=2)

- 次に標準形に置き換える

- スラック変数 x_3, x_4 の導入

目的関数: $f(x_1, x_2) = -x_1 - 2x_2 \rightarrow$ 最小化

制約条件:

$$\underline{\quad}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$$

- 実行可能領域の境界の4本の直線は、 x_1, x_2, x_3, x_4
に対応

2008/10/16

Katsuyoshi Iida (c)

19

幾何学的手法による解法(5) (決定変数=2)

- 従って

- [最適解の候補]=[2直線の交点]=[
4変数のうち2変数が0]

となる。4変数のうち2変数が0となるベクト
ル $\mathbf{x}=(x_1, x_2, x_3, x_4)$ は__個ある。このよう
な解(ベクトル)を_____という。



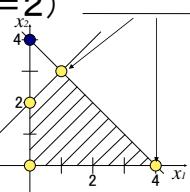
2008/10/16

Katsuyoshi Iida (c)

20

幾何学的手法による解法(6) (決定変数=2)

- $(0, 0, 4, 2) \rightarrow 0$
- $(0, 4, 0, -2) \rightarrow \times$
- $(0, 2, 2, 0) \rightarrow -4$
- $(4, 0, 0, 6) \rightarrow -4$
- $(-2, 0, 6, 0) \rightarrow \underline{\quad}$
- $(1, 3, 0, 0) \rightarrow \underline{\quad}$



21

2008/10/16

Katsuyoshi Iida (c)

幾何学的手法による解法(7) (決定変数=2)

- 従って、最適解は_____で、目的関
数の最小値は_____となる

・ポイント

- 最適解は4変数のうち2変数が0をとる



2008/10/16

Katsuyoshi Iida (c)

22

幾何学的手法による解法(8) (一般の場合)

- 標準形の問題を考える

目的関数: $\mathbf{c}^T \mathbf{x} \rightarrow$ 最小化

制約条件: $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$

変数が n 個、係数行列 A が $m \times n$ 行列、 $\text{rank}(A)=m$ と
する。任意に $(n-m)$ 個の変数選ぶと、他の m 個の
変数が決定できる。

従って、2変数の場合の2次元平面の代わりに
____次元空間を考えればよい。

2008/10/16

Katsuyoshi Iida (c)

23

幾何学的手法による解法(9) (一般の場合)

- 実行可能領域は、 $x_1=0, x_2=0, \dots, x_n=0$ が
表す n 枚の平面(境界面)によって囲まれ
る凸領域
- 目的関数は平行に移動する平面
- 最適解は実行可能領域の一つの端点
- すなわち_____枚の境界面が交わる点



2008/10/16

Katsuyoshi Iida (c)

24

幾何学的手法による解法(10) (一般の場合)

- 従って

- [最適解の候補] = [n 変数のうち $n-m$ 変数が0]
 n 変数のうち $n-m$ 変数を0とした (x_1, \dots, x_n) を
_____と呼び、
それ以外の変数を_____と呼ぶ。

2008/10/16

Katsuyoshi Iida (c)

25

幾何学的手法による解法(11) (一般の場合)

- さらに一般的に考えた場合

- 実行可能領域が閉じていない場合がある
- 閉じていない場合、最適解が存在しない場合がある。
つまり、目的関数は無限に大きく(小さく)できる
- 最適解が存在しない問題を**有界でない**または、
非有界という。
- 全ての基底解から目的関数を計算すればよい。

2008/10/16

Katsuyoshi Iida (c)

26

幾何学的手法による解法(12) (基底形式)

目的関数: $2x_1 + x_3 + x_4 \rightarrow$ 最小化

$$\begin{array}{rcl} \text{制約条件: } 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 & = & 12 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 + x_5 & = & 8 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad \dots, \quad x_5 \geq 0 & & \end{array} \quad (\text{式:2.1})$$

- 係数行列 $A =$

$\text{rank}(A)=2$ より、5つの変数のうち2変数は残りの3変数によって決定される

$$x_4 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$x_5 = \underline{\hspace{2cm}}$$

2008/10/16

Katsuyoshi Iida (c)

27

幾何学的手法による解法(13) (基底形式)

- 目的関数も3つの変数 x_1, x_2, x_3 で書ける

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_3 + x_4 &= 2x_1 + x_3 + (\underline{\hspace{2cm}}) \\ &= \underline{\hspace{2cm}} \end{aligned}$$

2008/10/16

Katsuyoshi Iida (c)

28

幾何学的手法による解法(14) (基底形式)

- n 変数、制約条件の式の数が m の場合

- m 個の変数 $x_B = (x_1, x_2, x_3) : \underline{\hspace{2cm}}$
- $(n-m)$ 個の変数 $x_N = (x_4, x_5, \dots) : \underline{\hspace{2cm}}$

・ポイント

- 目的関数と m 個の基底変数は、 $n-m$ 個の非基底変数によって表現可能

2008/10/16

Katsuyoshi Iida (c)

29

幾何学的手法による解法(15) (基底形式)

- ある非基底変数を選択したときの、基底変数・目的関数の表現法

$$\begin{array}{ll} \text{目的関数: } & c^T x \rightarrow \text{最小化} \\ \text{制約条件: } & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array} \quad (\text{標準形})$$

$$\begin{array}{ll} \cdot n \text{次元の変数ベクトル } x & \rightarrow x_B \quad x_N \\ \cdot m \times n \text{の係数行列 } A & \rightarrow B \quad N \\ & \quad (m \times m \text{行列}) \quad (m \times n-m \text{行列}) \\ \cdot n \text{次元の費用ベクトル } c & \rightarrow C_B \quad C_N \\ & \quad \text{基底部分} \quad \text{非基底部分} \end{array}$$

2008/10/16

Katsuyoshi Iida (c)

30

幾何学的手法による解法(16) (基底形式)

- Ax を変換すると $Ax = Nx_N + Bx_B = b$

• B が正則行列あるから

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$$

• c を分けることにより

$$\begin{aligned} f(x) &= c_N^T x_N + c_B^T x_B \\ &= c_N^T x_N + c_B^T (B^{-1}b - B^{-1}Nx_N) \\ &= c_B^T B^{-1}b + (c_N^T - c_B^T B^{-1}N)x_N \end{aligned}$$

2008/10/16

Katsuyoshi Iida (c)

31

幾何学的手法による解法(17) (基底形式)

- 基底解 = _____ 個の変数を0としたもの

- _____ を全て0 $\rightarrow x_N=0$

• よって

$$x_B = B^{-1}b$$

$$f(x) = c_B^T B^{-1}b$$

$B^{-1}b \geq 0$ であるとき、この基底解は実行可能

2008/10/16

Katsuyoshi Iida (c)

32

幾何学的手法による解法(18) (基底形式)

$$f(x) = c_B^T B^{-1}b + (c_N^T - c_B^T B^{-1}N)x_N$$

• $(c_N^T - c_B^T B^{-1}N) \geq 0$ のとき、 $x_N \geq 0$ より、目的関数が最小となるのは、 $x_N=0$ のときである、従って現在得られている基底解は_____

• $(c_N^T - c_B^T B^{-1}N)_i < 0$ となる要素があるとき：

• 非基底変数の選択を間違えており、当該変数を_____することによって、目的関数をもっと_____することが出来る

2008/10/16

Katsuyoshi Iida (c)

33

課題

- 1. 次のように定式化された問題を標準形に書き換えよ。 目的関数: $x_1 + 2x_2 + x_3 \rightarrow \text{最大化}$

制約条件: $x_1 + x_2 \leq 10$

$-x_1 + x_3 \geq 8$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

- 2. 26頁式2.1で与えられた問題を基底形式に書き直せ。また、基底変数、非基底変数、基底解、基底解における目的関数の値を求めよ。さらに、当該基底解の最適性を説明せよ。

2008/10/16

Katsuyoshi Iida (c)

34