情報認識
「最近傍密度推定法」

- 担当教員： 杉山　将（計算工学専攻）
- 居室：　W8E-505
- 電子メール:　　sugi@cs.titech.ac.jp

ノンパラメトリック法の基礎

- 確率 P を二つの方法で近似する.

A) k, n を用いれば,

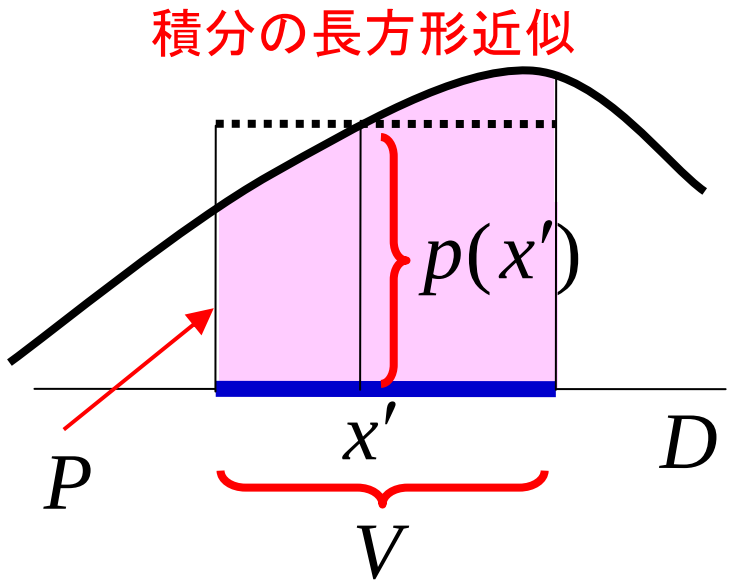
$$P \approx k/n$$

B) 領域 R 内のある点 x' を用いれば,

$$P \approx Vp(x')$$

- これらより

$$p(x) \approx \frac{k}{nV}$$



ノンパラメトリック法

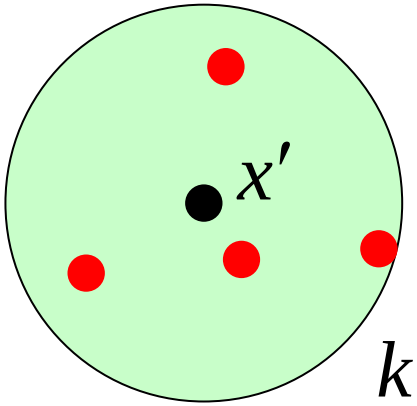
$$p(x) \approx \frac{k}{nV}$$

- 訓練標本を用いて領域 R を決める.
  - パーゼン窓法，核密度推定法:
    Rの形を決め V を固定したもとで k を標本から決定
  - 最近傍密度推定法:
    Rの形を決め k を固定したもとで V を標本から決定

最近傍密度推定法

- k-最近傍密度推定法(k-nearest neighbor density estimation):
  - 領域 R として，ある点 x' を中心とする超球(hypersphere)を用いる.
  - 超球の半径 r :訓練標本が k 個含まれる最小の大きさに設定
  - 超球の体積:

$$V = \frac{\pi^{\frac{d}{2}} r^d}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)}$$



$k = 4$

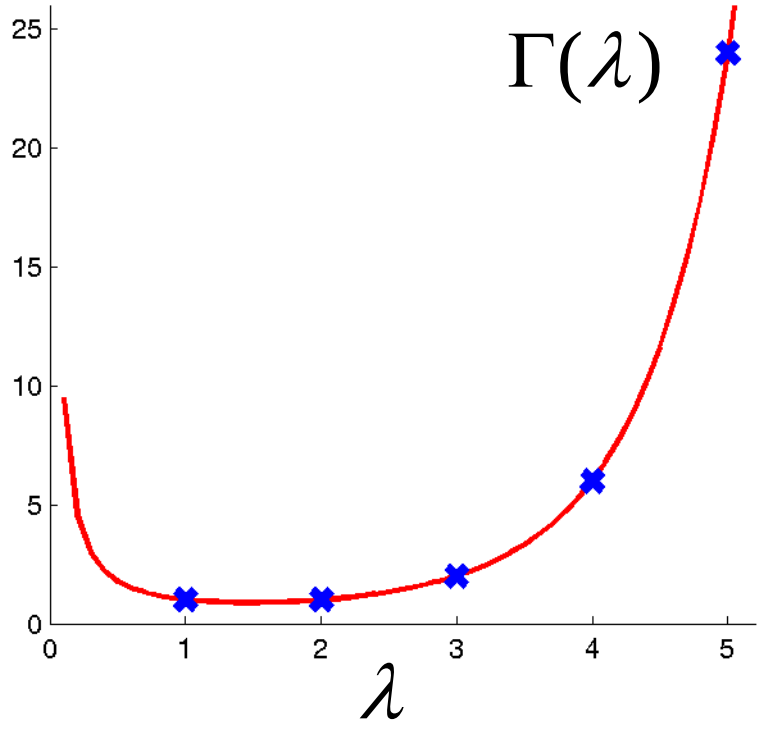
  - $$\hat{p}(x) = \frac{k\Gamma(\frac{d}{2}+1)}{n\pi^{\frac{d}{2}} r^d}$$

$$p(x) \approx \frac{k}{nV}$$

ガンマ関数

- ガンマ関数(gamma function):

$$\Gamma(\lambda) = \int_0^\infty x^{\lambda-1} e^{-x} dx$$



ガンマ関数の性質

$$\Gamma(\lambda)=\int_0^\infty x^{\lambda-1}e^{-x}dx$$

- 階乗の一般化：正の整数 n に対して

$$\Gamma(n+1)=n!$$

- その他の性質
  - $\Gamma(t)=(t-1)\Gamma(t-1),\ \forall t\in\mathbf{R}$
  - $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$
- 演習：
  - $d=2$ のとき $V=\pi r^2$
  - $d=3$ のとき $V=\frac{4}{3}\pi r^3$

$$V=\frac{\pi^{\frac{d}{2}}r^d}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)}$$

条件付き確率の推定

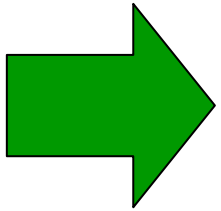
- 各カテゴリに対して，条件付き確率 $p(x \mid y)$ を1-最近傍密度推定法により推定.

$$\hat{p}(x \mid y) = \frac{\Gamma(\frac{d}{2}+1)}{n_y \pi^{\frac{d}{2}} r_y^d}$$

r_y : カテゴリ y に属する標本のうち x に最も近いものと，x との距離

- $p(y) \approx n_y / n$ と事後確率 $p(y \mid x)$ は，

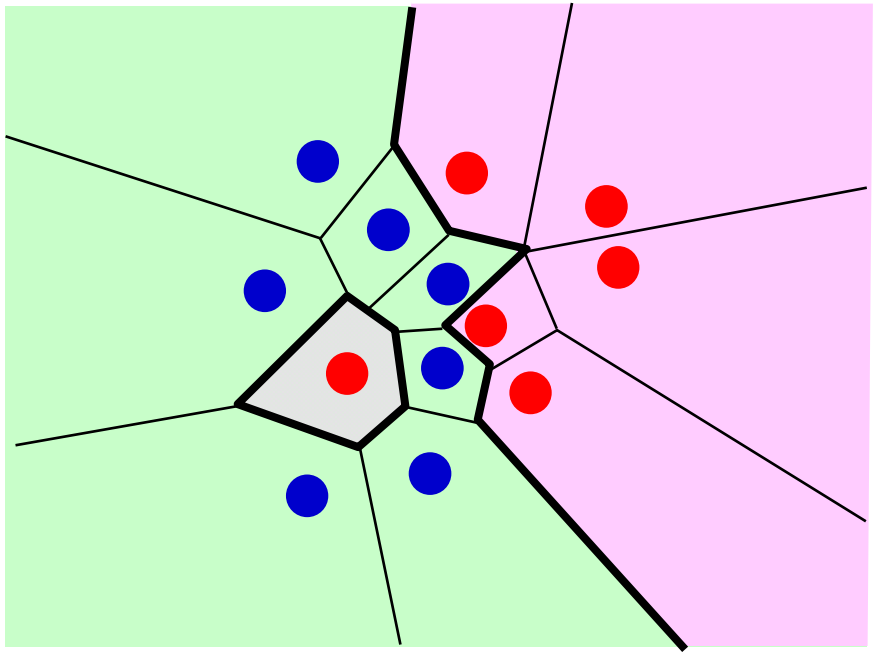
$$p(y \mid x) \propto p(x \mid y) p(y) \approx \frac{\Gamma(\frac{d}{2}+1)}{n_y \pi^{\frac{d}{2}} r_y^d} \frac{n_y}{n} \propto \frac{1}{r_y^d}$$



r_y が小さいほうが
事後確率が大きい！

最近傍識別器

- 事後確率が最大のカテゴリ
  ＝　x に一番近い訓練標本が属するカテゴリ
- このような識別法を，最近傍識別器(nearest neighbor classifier)とよぶ.



k-最近傍識別器

- 実用的には, x の近傍 k 個の訓練標本が属するカテゴリの多数決で, x の属するカテゴリを決める k -最近傍識別器(k-nearest neighbor classifier)がよく用いられる.

近傍数kの決め方

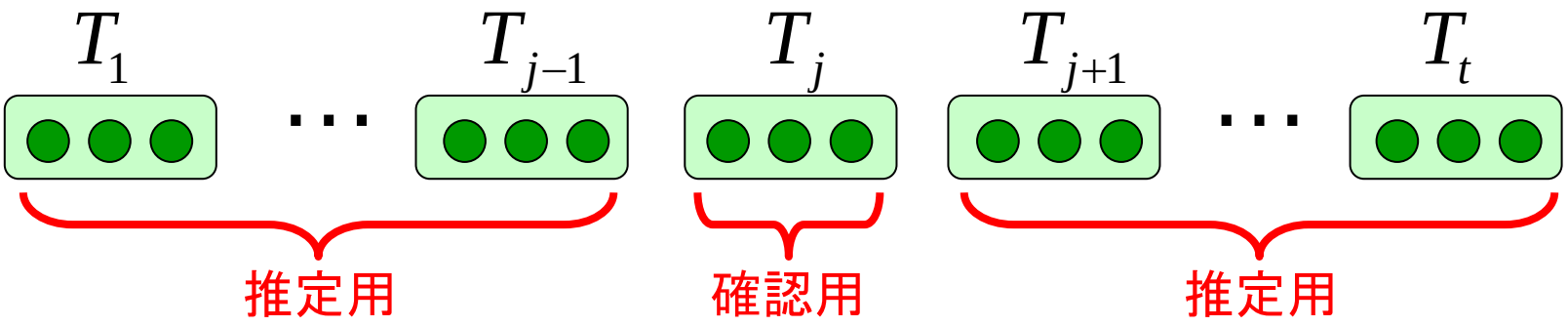
- k-最近傍識別器では近傍数kを適切に決める必要がある.
  1. 値の候補を用意する. 例えば, $k = 1,2,\ldots,10$
  2. それぞれのモデルに対して, パターンの誤認識率を推定する.
  3. 誤認識率の推定値を最小にするモデルを選ぶ.

- どうやってパターンの誤認識率を推定するか？

交差確認法

交差確認法(cross validation)

- 訓練標本$\{x_i\}_{i=1}^{n}$を t 個の重なりの無い，（ほぼ）同じ大きさの部分集合$\{T_i\}_{i=1}^{t}$に分ける.
- j 番目の部分集合 T_j に含まれる訓練標本を使わずに識別器を学習する.
- T_j に含まれる標本の誤認識率を計算する（訓練標本なので答えを知っている！）.
- これを全ての j に対して繰り返し平均する.



連絡事項

- 来週（12月15日）:
  - 情報工学科計算機室にて計算機実習を行う.
  - 資料・実習課題は事前にウェブに公開する.
  - 出席は取らないので，各自で好きな時間に実習を行ってもよい.

小レポート（第7回）

- 1次元の入力に対する最近傍密度推定法を実装し，適当なデータを用いて確率密度関数を推定せよ（前回の小レポート参照）.
- データ標本数，真の確率分布，近傍数などの条件を変化させたとき，どのように推定結果が変わるかを考察せよ.

- 余力のある学生は，入力が2次元の場合に対しても同様の実験を行え．また，次元が増えたことによりどのような変化が生じたかを考察せよ.