確率と統計（O）
「統計的推定（第１１章）と仮説検定（第１２章）」

- 担当教員： 杉山　将（計算工学専攻）
- 居室： W8E-505
- 電子メール: sugi@cs.titech.ac.jp

- 授業のウェブサイト:

  http://sugiyama-www.cs.titech.ac.jp/~sugi/

母集団の推定

- 一般に確率分布には母数(parameter)が含まれており，母数の値によって分布の形状が異なる
  - 例）正規分布の場合，期待値 μ と分散 σ^2:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

- 標本が従う確率分布の種類がわかっていても母数の値を決めなければ分布の形状は決まらない
- 統計的推定(statistical inference)：母分布（の母数）を標本から推定する

最尤(さいゆう)法

- 尤度(likelihood):手元にある標本が得られる確率
- 最尤原理:現実の標本は確率最大のものが実現したと考える原理
- 最尤法(maximum likelihood estimation) :尤度を最大にするパラメータの値を推定値とする方法

最尤とは「もっともっともらしい」という意味

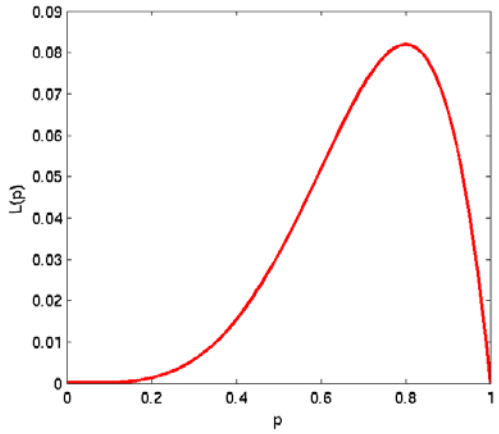
最尤法（続き）

- 例）成功確率が p のベルヌーイ分布に従う標本

  {成功、失敗、成功、成功、成功}

  が与えられたとする．尤度は

$$L(p) = p^4(1-p)$$



  このとき，

$$L'(p) = p^3(4-5p)$$

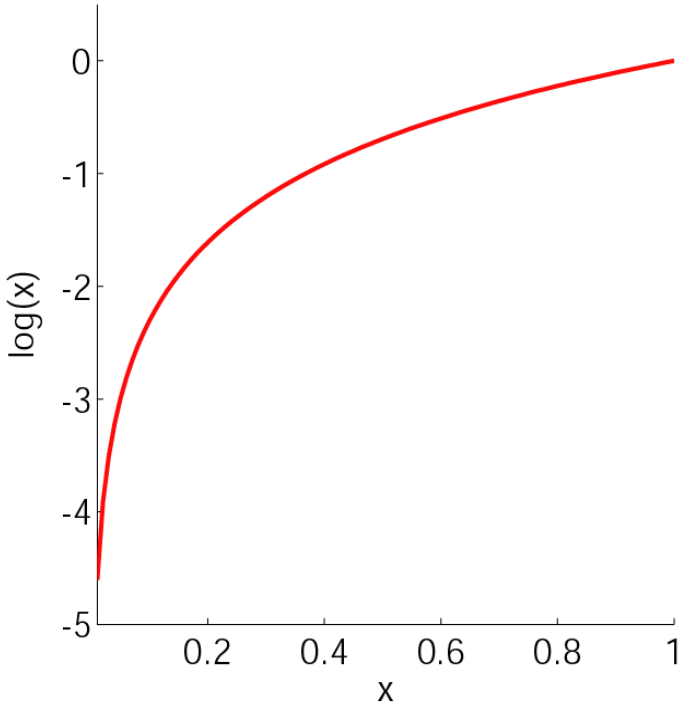
  なので，

$$\widehat{p}_{ML} = \underset{p}{\operatorname{argmax}}\, L(p) = 0.8$$

- ５回中４回が成功なので，0.8は最も尤もらしいであろう．

最尤法(続き)

- 対数尤度(log-likelihood):尤度の対数
- 対数は単調増加関数なので，対数を取っても尤度の大小関係は変わらない．対数尤度を最大にするようにパラメータを決めたほうが計算が簡単になることがある．



演習

- 正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従うi.i.d.標本 $\{x_i\}_{i=1}^n$ の尤度は

$$L(\mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} f(X_i)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

1. 対数尤度を求めよ.
2. 期待値 μ の最尤推定量 $\widehat{\mu}_{ML}$ を求めよ.
3. 分散 σ^2 の最尤推定量 $\widehat{\sigma}^2_{ML}$ を求めよ.

仮説検定

- 仮説検定(hypothesis testing)：母集団について仮定された命題を，標本に基づいて検証すること

  （例）コインを20回投げて表が17回出た.
  この結果から表が出やすいといえるか？

- 帰無仮説(null hypothesis)：もとの仮説

  （例）コインは歪んでいない（表が出る確率 $p = 1/2$ ）

- 対立仮説(alternative hypothesis)：帰無仮説と対立する仮説

  （例）表が出やすい $p > 1/2$

有意水準

- 有意水準(significance level) α :
  起こる確率がこの確率より小さければ，帰無仮説を棄却(reject)する．また，逆にこの確率以上であれば帰無仮説を採択(accept)する．
- 有意水準は5%か1%に設定することが多い．

仮説検定の例

- コインが歪んでいない（$p = 1/2$）と仮定すれば，
  20回中17回以上表が出る確率は

$$({}_{20}C_{17} + {}_{20}C_{18} + {}_{20}C_{19} + {}_{20}C_{20}) \times (1/2)^{20} \approx 0.0013$$

- 有意水準を1%（$\alpha = 0.01$）にとることにすれば，
  20回中17回以上表が出る確率は有意水準より
  小さいので帰無仮説は棄却される．
- 即ち，表が出やすい（$p > 1/2$）と結論づける．

16回以上:0.0059, 15回以上:0.0207,
14回以上:0.0577, 13回以上:0.1316,…

棄却／採択と誤り

		真実	
		帰無仮説が正しい	対立仮説が正しい
検定の結果	帰無仮説を採択	正解	第2種の誤り (error of the second kind)
	帰無仮説を棄却	第1種の誤り (error of the first kind)	正解

- 第1種の誤り
  歪んでいないコインを歪んでいると判断してしまう
- 第2種の誤り
  歪んでいるコインを歪んでいないと判断してしまう

帰無仮説の採択について

- 仮説検定で帰無仮説を棄却するときは，帰無仮説がほとんど起こらないことを証明している.
- しかし帰無仮説を採択するときは，積極的に帰無仮説が起こることを証明しているのではなく，帰無仮説が現実と矛盾することを証明するだけの十分な根拠がないと言っているだけである.
- このような論法は論理学では背理法(proof by contradiction)と呼ばれている.

両側検定と片側検定

- 両側検定(two-sided test)：

  得られた値が目標値と等しいかどうかを調べる

  （例）ある装置の複製を作ったとき，もとの装置と同じ性能が得られるかを調べる

- 片側検定(one-sided test)：

  得られた値が比較値よりも大きいかどうかを調べる

  （例）新しく開発した装置の性能が従来の装置よりもよいかどうかを調べる

例: 正規母集団の平均の検定

- 分散が既知の正規母集団に従う標本

$$X_i \overset{i.i.d.}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$$

から，帰無仮説「母集団の平均は $\mu = 10$ である」を有意水準 α で検定する.

- 標本平均の分布を計算し，その出現確率を調べる:
  - 標本平均の分布は，

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$$

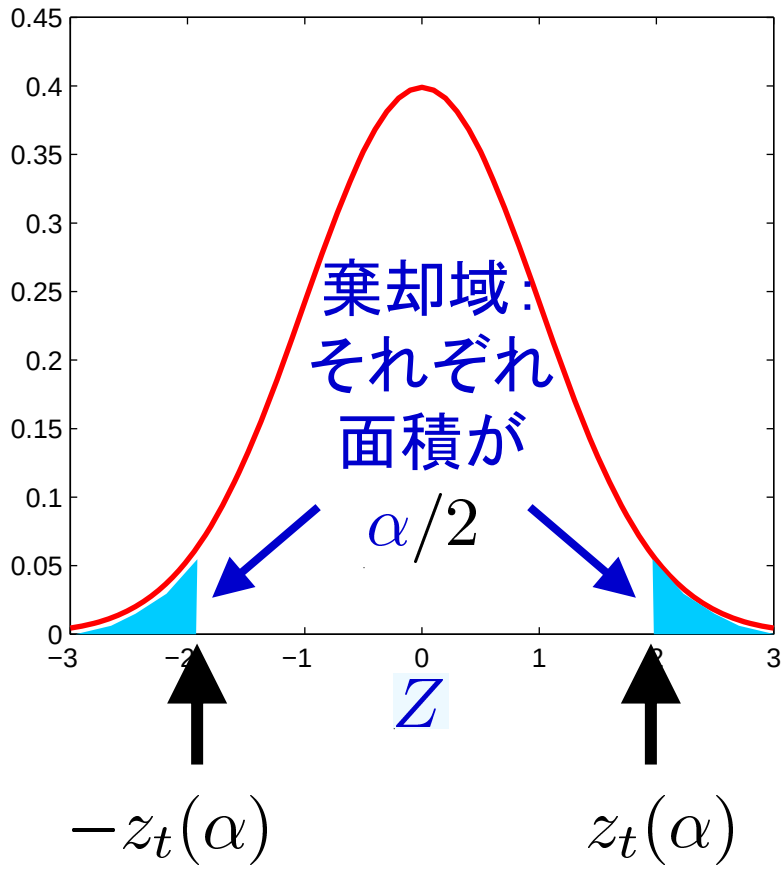
  - 適当に正規化すれば，

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

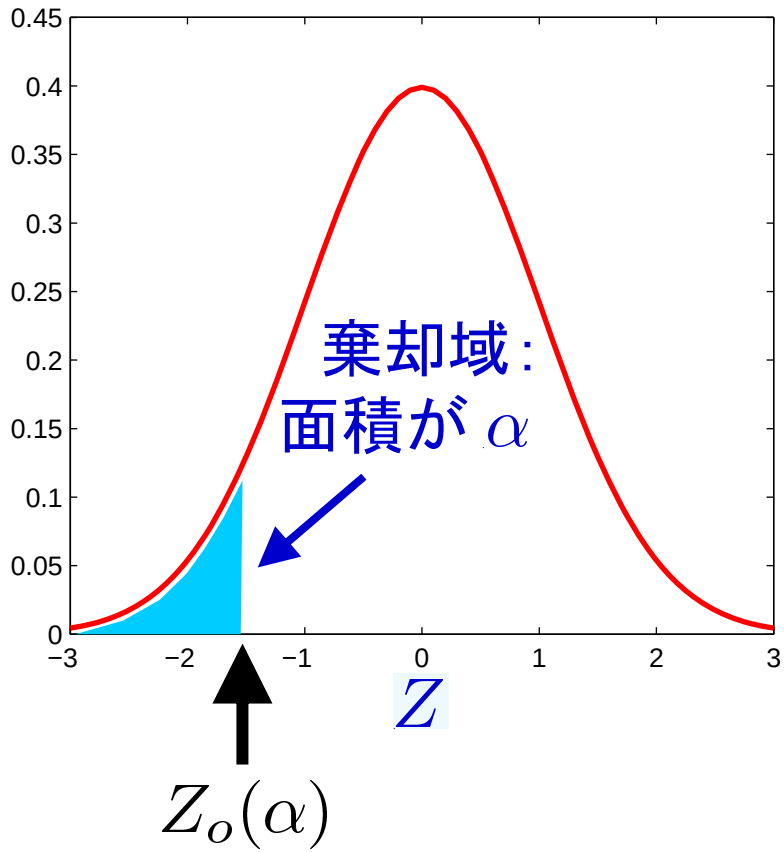
両側検定

$$Z = \frac{\overline{X} - 10}{\sigma/\sqrt{n}}$$

- 帰無仮説: $\mu = 10$
- 対立仮説: $\mu \neq 10$
- 棄却域(rejection region): 有意水準 α に対して, 確率分布の両端の面積が $\alpha/2$ の領域
- 現実の正規化標本平均 Z が棄却域に入ったら, 帰無仮説を棄却する. 即ち, $|Z| > z_t(\alpha)$ ならば $\mu \neq 10$ と判断する



片側検定

$$Z = \frac{\overline{X} - 10}{\sigma/\sqrt{n}}$$

- 帰無仮説: $\mu = 10$
- 対立仮説: $\mu < 10$
- 棄却域(rejection region):
  有意水準 α に対して,
  確率分布の左端の面積が
  α の領域
- 現実の正規化標本平均 Z が棄却域に入ったら, 帰無仮説を棄却する. 即ち, $Z < z_o(\alpha)$ ならば $\mu < 10$ と判断する