確率と統計（O）
「大数の法則と中心極限定理（第8章）」

- 担当教員： 杉山　将（計算工学専攻）
- 居室： W8E-505
- 電子メール: sugi@cs.titech.ac.jp

- 授業のウェブサイト:

  http://sugiyama-www.cs.titech.ac.jp/~sugi/

独立同一分布

- 同じ分布から独立に n 個の標本

$$X_1, X_2, \ldots, X_n$$

を取り出したとき，これらは独立同一分布に従う (independent and identically distributed，略して i.i.d.)という

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ の同時確率密度関数は

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g(x_1)g(x_2)\cdots g(x_n)$$

i.i.d確率変数の標本平均

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$: 期待値 μ, 分散 σ^2 のi.i.d.標本
- 標本平均 $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ の性質（証明は演習）:
  - 期待値は変わらない: $E(\overline{X}_n) = \mu$
  - 分散は $1/n$ になる: $V(\overline{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n}$

→ 標本平均を取れば値が安定する！

注意 : ここでの期待値 E は, n 個全ての確率変数に対する期待値である

$$E[Z] = \int\int\cdots\int Zg(X_1)g(X_2)\cdots g(X_n)dX_1dX_2\cdots dX_n$$

大数の法則

- 大数の法則(law of large numbers)：任意の正の定数 ε に対して，$n \to \infty$ のとき

$$P(|\overline{X}_n - \mu| < \varepsilon) \to 1$$

- 確率論の用語ではこれを，$\overline{X}_n$ が μ に確率収束(convergence in probability)するという

- 解釈：標本を十分たくさん取れば，標本平均を母平均とみなしてもよい！

証明

- 各標本の期待値を μ ，分散を σ^2とすれば,

$$E(\overline{X}_n) = \mu \qquad V(\overline{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n}$$

- ここで、チェビシェフの不等式を使うと

$$P(|\overline{X}_n - \mu| > \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2/n}{\varepsilon^2}$$

- $n \to \infty$ のとき，右辺は常にゼロに収束する.

(Q.E.D.)

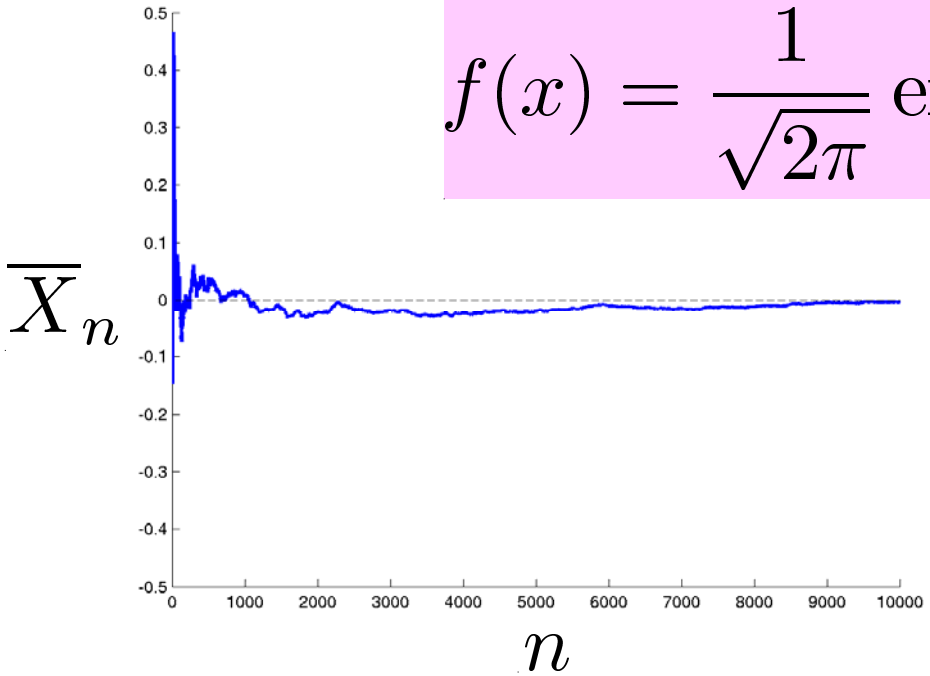
チェビシェフの不等式

$$P(|X - E(X)| \geq k) \leq \frac{V(X)}{k^2}$$

大数の法則の例（1）

- $\{X_i\}_{i=1}^n$ が、平均0、分散1の標準正規分布に独立に従うとき

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$



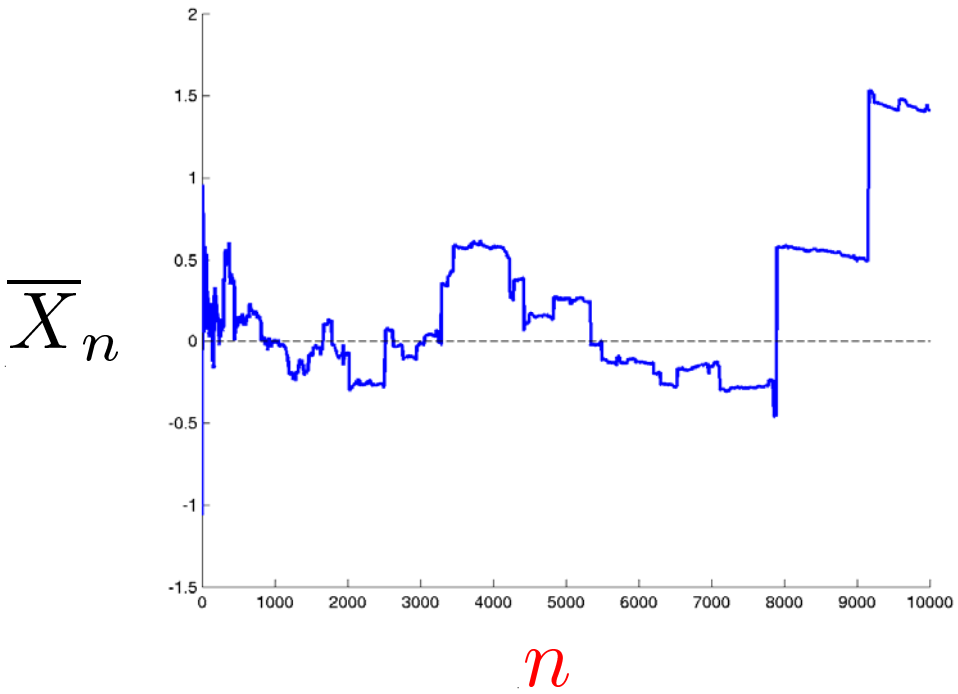
標本平均は確かに母平均0に収束していく

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

大数の法則の例(2)

- $\{X_i\}_{i=1}^n$ が、“中心”0の
コーシー分布に独立に従うとき

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$



標本平均は収束しない

→ コーシー分布の期待値は存在しない

標本平均の分布

- 大数の法則から，標本平均が母平均に近づいていくことがわかった
- 大標本の極限の少し手前では，標本平均はどのように分布しているのであろうか？

中心極限定理

- 標本平均を標準化する:

$$Z_n = \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \qquad E[Z_n] = 0, \quad V[Z_n] = 1$$

- 中心極限定理(central limit theorem):

$n \to \infty$ のとき

$$P(a \le Z_n \le b) \to \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$$

中心極限定理(続き)

- 確率論の用語ではこれを, Z_n が標準正規分布に法則収束(convergence in law), または分布収束(convergence in distribution)するという.

- また, Z_n は漸近的(asymptotically)に標準正規分布に従うともいう.

中心極限定理の解釈

大標本の極限では, もとの分布が何であろうと
標本平均 $\overline{X}_n$ は,
平均 μ, 分散 σ^2/n の正規分布に大体従う

中心極限定理の証明

- 標準正規分布の積率母関数は $e^{t^2/2}$ なので，次式を示す

$$\lim_{n\to\infty} M_{Z_n}(t) = e^{t^2/2}$$

- $$Z_n = \frac{\sqrt{n}\,\overline{X}_n - \sqrt{n}\mu}{\sigma} = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\mu}{\sigma}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i-\mu}{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} Y_i$$

$$Y_i = \frac{X_i-\mu}{\sigma}$$

- Y_i は平均0，分散1なので，積率母関数は

$$M_{Y_i}(t) = 1 + \mu_1 t + \frac{\mu_2}{2!}t^2 + \frac{\mu_3}{3!}t^3 + \cdots$$

$$= 1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{\mu_3}{3!}t^3 + \cdots$$

$$\mu_1 = 0$$

$$\mu_2 = 1$$

中心極限定理の証明（続き）

■ Z_n の積率母関数は

$$
\begin{aligned}
M_{Z_n}(t) &= \left[M_{Y_i/\sqrt{n}}(t)\right]^n \\
&= \left[M_{Y_i}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right]^n \\
&= \left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^2 + \frac{\mu_3}{3!}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^3 + \cdots\right]^n \\
&= (1+u)^n
\end{aligned}
$$

独立ならば

$$M_{Y_1+Y_2}(t) = M_{Y_1}(t)M_{Y_2}(t)$$

一般に

$$M_{aY}(t) = E(e^{taY}) = M_Y(at)$$

$$u = \frac{t^2}{2n} + \frac{\mu_3}{3!}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^3 + \cdots$$

■ 以下，$\lim_{n\to\infty} M_{Z_n}(t) = e^{t^2/2}$ の両辺の対数をとり

$$\lim_{n\to\infty}(\log M_{Z_n}(t) - t^2/2) = 0$$

を示す

中心極限定理の証明（続き）

- $n \to \infty$ のとき，$|u| < 1$ なので次のようにテーラー展開できる

$$\log(1+u) = u - u^2/2 + u^3/3 - \cdots$$

- 従って $\log M_{Z_n}(t) - t^2/2 = n\log(1+u) - t^2/2$

$$= n(u - u^2/2 + u^3/3 - \cdots) - t^2/2$$

- $nu = \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{\mu_3}{3!}\dfrac{t^3}{n^{1/2}} + \cdots$ より

$$\lim_{n\to\infty} nu = t^2/2$$

- また

$$\lim_{n\to\infty} nu^q = 0 \quad (q \geq 2)$$

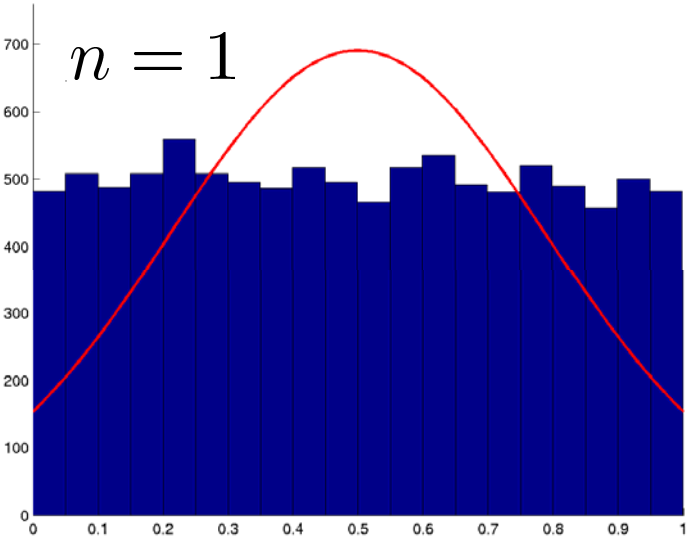
- 従って

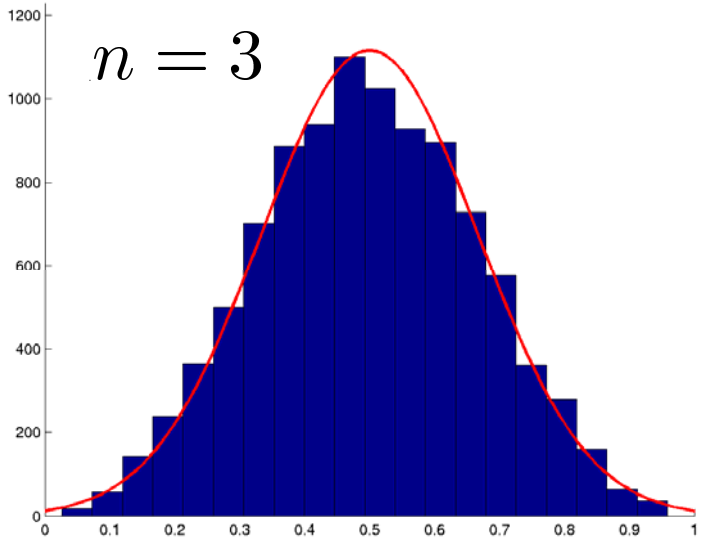
$$\lim_{n\to\infty} (\log M_{Z_n}(t) - t^2/2) = 0$$

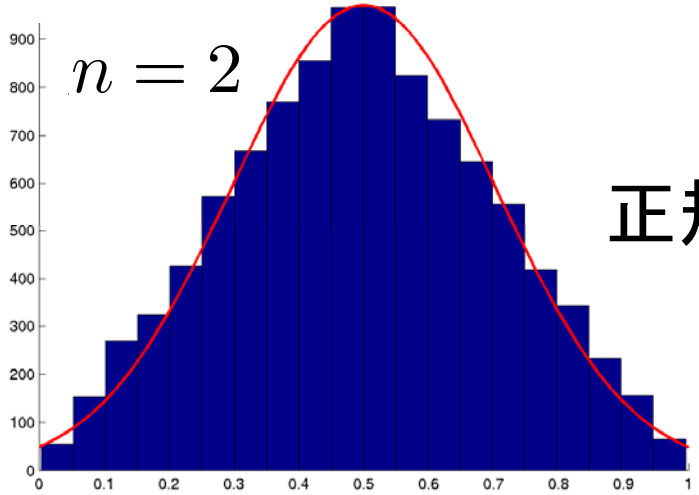
(Q.E.D.)

中心極限定理の例(1)

- (0, 1)上の一様分布



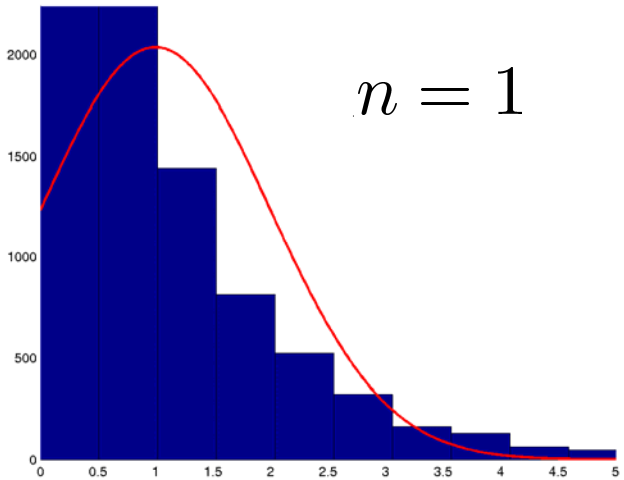


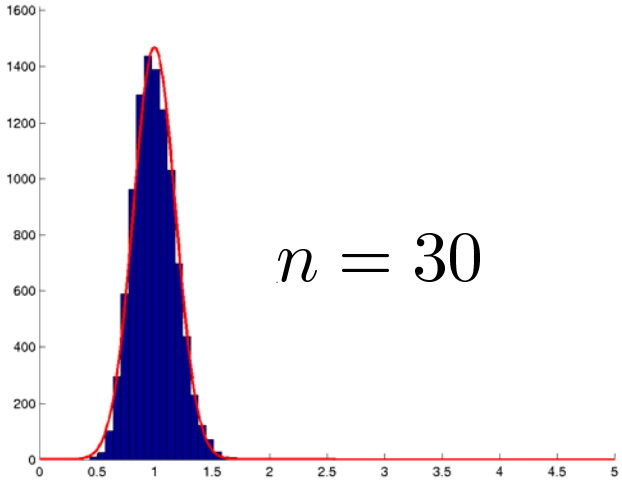


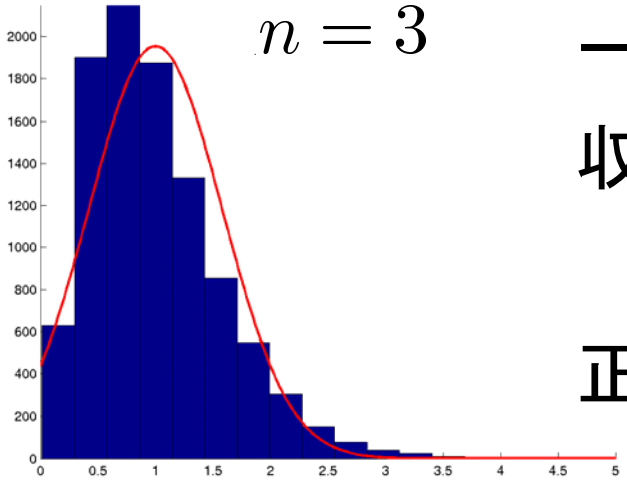
$n = 2, 3$ 位で
正規分布に似てくる

中心極限定理の例(2)

- 指数分布 $f(x) = e^{-x}$



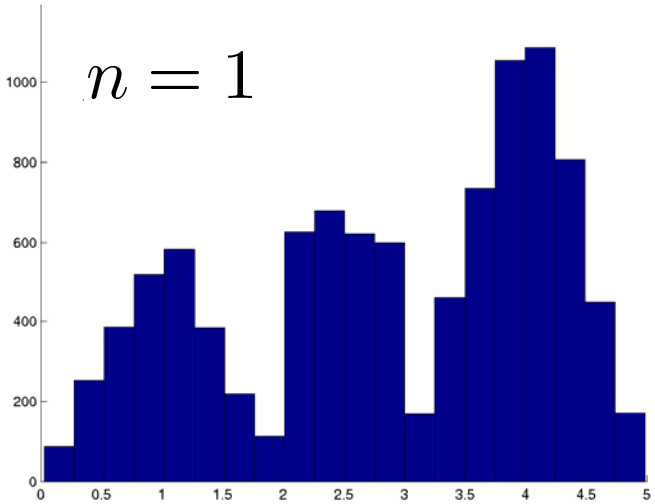


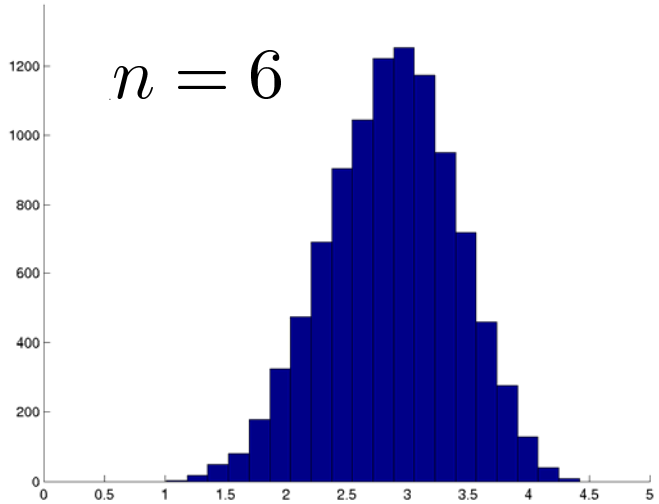


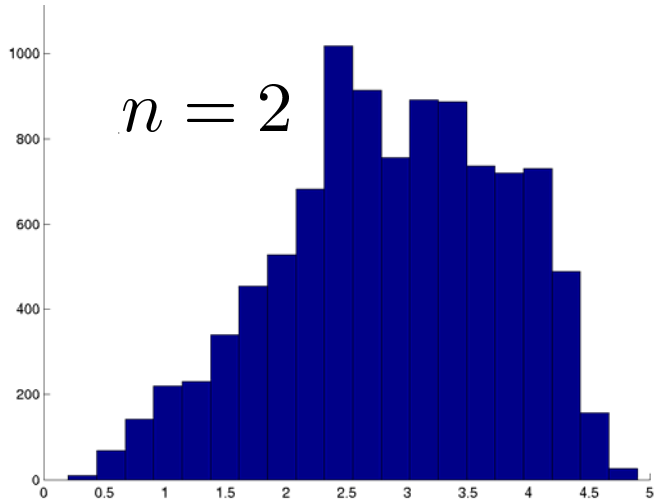
一様分布の場合より
収束が若干遅いが,
$n = 30$ 位で
正規分布に似てくる

中心極限定理の例(3)

- 適当な分布







宿題

1. Octaveなどを用いて，一様分布に独立に従う確率変数を生成し，標本数を増やしていったときの，標本平均のグラフを作成し，大数の法則が成り立つことを確認せよ.
2. 同様に，標本数を増やしていったときの標本平均の分布ヒストグラム（つまり，n 個の標本を生成し標本平均を求めるという過程を何度も繰り返し，その分布をプロットする）を作成し，中心極限定理が成り立つことを確認せよ.

宿題（続き）

3. コーシー分布に従う確率変数に対して1，2と同様の実験を行い，大数の法則，および，中心極限定理が成りたたないことを確認せよ.

   ヒント：標準正規分布に独立に従う確率変数 X, Y の比 X/Y はコーシー分布

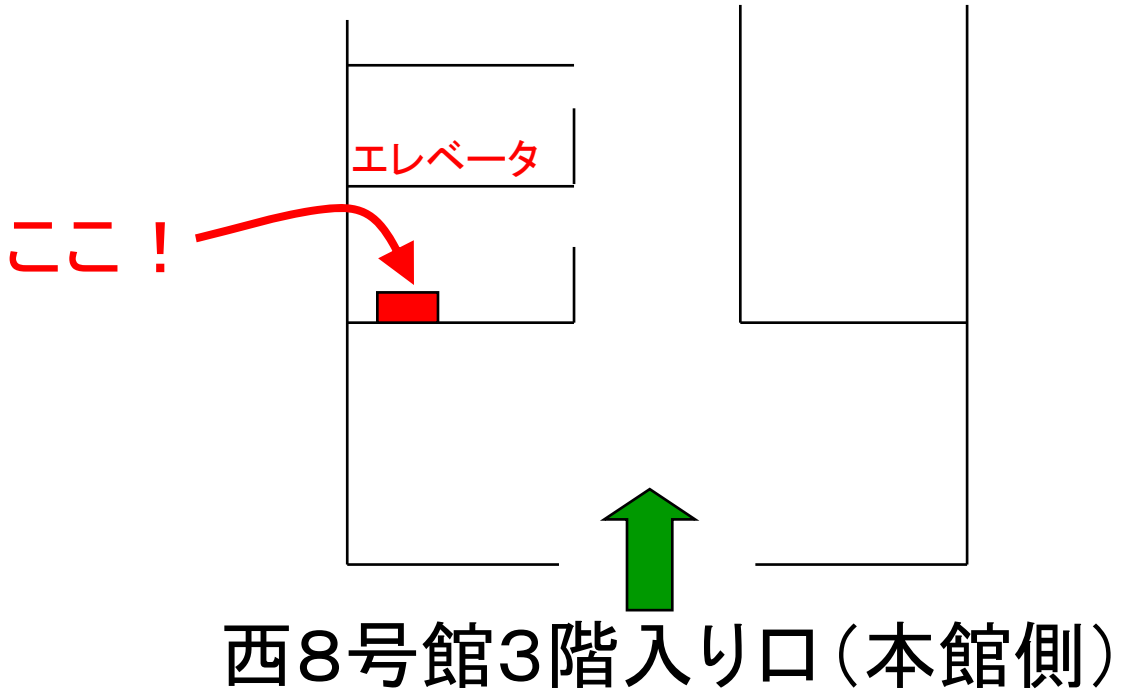
$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

   に従う

4. 以前の課題で自作した独自の確率分布に従う確率変数に対して，1，2と同様の実験を行ない，大数の法則，および，中心極限定理が成り立つかどうか確認せよ.

今回の宿題の提出期限と提出場所

- 提出期限：7月18日（金曜日）
- 提出場所：西8号館E棟3階の杉山のポスト（W8－74）



今後のスケジュール

- 自習：7月4日（金），7月11日（金），7月18日（金）
- 補講：7月25日（金）
- 試験：8月1日（金）

- 社会工学科の学生は，「サンプリング理論と実験計画」の集中講義と重なっているが，試験を優先してよいという旨の連絡があったので各自で判断すること．

試験について

- 日時：8月1日（金）3,4限
- 場所：W241
- 試験内容：
  - 専門用語の英語名を答えよ
  - 与えられたテーマから二つ選び，自由に論ぜよ．例えば，（a）積率母関数，（b）中心極限定理，（c）任意の分布に従う乱数を生成する方法

- 教科書，ノートは持ち込み不可！