

確率と統計(0)

「確率不等式と擬似乱数」

- 担当教員: 杉山 将 (計算工学専攻)
- 居室: W8E-505
- 電子メール: sugi@cs.titech.ac.jp
- 授業のウェブサイト:
<http://sugiyama-www.cs.titech.ac.jp/~sugi/>

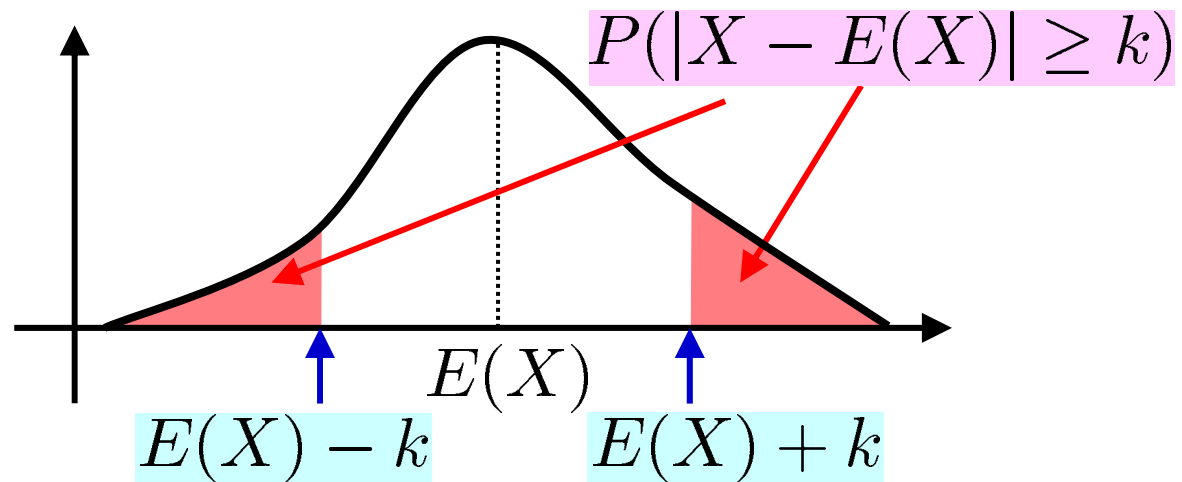
チェビシェフの不等式

67

■ チェビシェフの不等式(Chebyshev's inequality)

$$P(|X - E(X)| \geq k) \leq \frac{V(X)}{k^2} \quad k > 0$$

- 確率分布の具体的な形は分からないが期待値と分散が分かるとき, チェビシェフの不等式によって確率の上限が計算できる
- チェビシェフの不等式は**いかなる確率変数**に対しても成立する！



チェビシェフの不等式(証明)

68

$$P(|X - E(X)| \geq k) \leq \frac{V(X)}{k^2}$$

$$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (X - E(X))^2 f(X) dX$$

$$\geq \int_I (X - E(X))^2 f(X) dX$$

$$I = \{X : |X - E(X)| \geq k\}$$

$$\geq k^2 \int_I f(X) dX$$

$$= k^2 P(|X - E(X)| \geq k)$$

チェビシェフの不等式の使用例

69

演習

1. ある試験の点数の平均が60点, 分散が20であった. 65点以上または55点以下の人は全体の何パーセント以下か?
2. ある試験の点数の平均が60点, 分散が30であった. 50点以上70点以下の人は全体の何パーセント以上か?

その他の便利な不等式

- マルコフの不等式(Markov's inequality):

$$P(X \geq a) \leq \frac{1}{a} E[X] \quad \text{for any } a > 0$$

- ジェンセンの不等式(Jensen's inequality):

$$E[h(X)] \geq h(E[X])$$

$h(x)$: 凸関数

- ヘルダーの不等式(Hölder's inequality):

$$E[|XY|] \leq (E[|X|^p])^{1/p} (E[|Y|^q])^{1/q}$$

for any $p, q > 0$ such that $1/p + 1/q = 1$

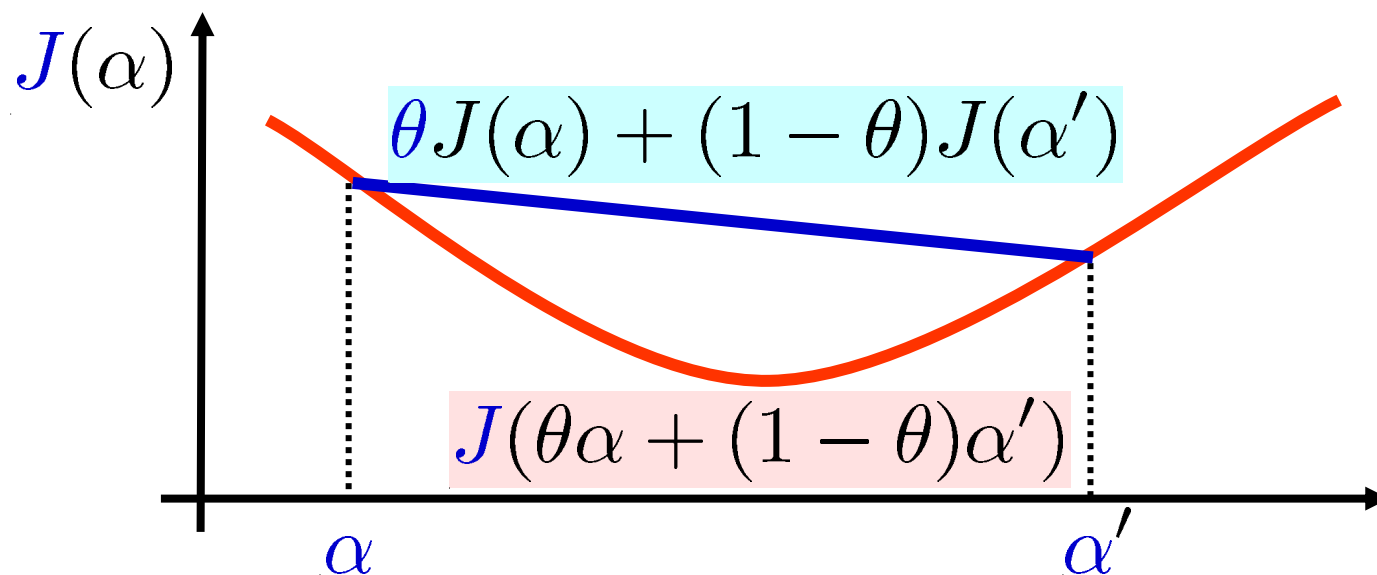
特に $p = q = 2$ の場合をシュワルツの不等式
(Schwarz's inequality)とよぶ

凸関数

71

- 任意の α, α' と任意の $\theta \in (0, 1)$ に対して以下の式が成り立つとき, $J(\alpha)$ は凸関数 (convex function) であるという

$$J(\theta\alpha + (1 - \theta)\alpha') \leq \theta J(\alpha) + (1 - \theta)J(\alpha')$$



計算機による乱数の生成

72

- 乱数を計算機内で生成するのは非常に難しい！
- 乱数を生成するための専用のハードウェアもある。
例：電子素子の熱雑音などの物理現象を利用
- 一般には、擬似乱数を用いることが多い。
例：C言語のrand関数は一様擬似乱数を生成する
- 一様擬似乱数や正規擬似乱数を生成する関数は、大抵の計算機言語で用意されている。
- それ以外の任意の分布に従う乱数も作りたい！

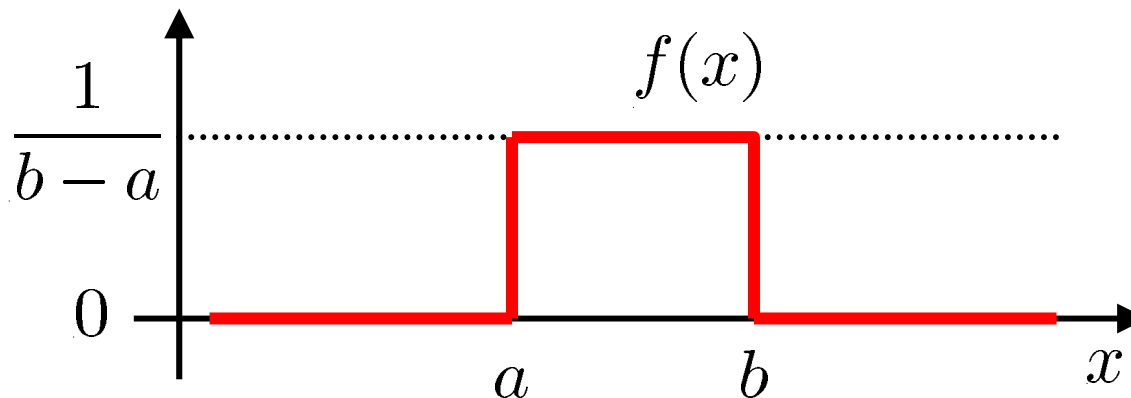
一様分布

73

- 連続一様分布(uniform distribution of continuous type) : 確率密度関数が一様

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & (\text{for } a \leq x \leq b) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

- (a, b) 上の一様分布を $U(a, b)$ と表す.



乱数の生成法 1

74

■ 逆関数法(inverse transform sampling): ある確率密度関数 $f(x)$ に従う確率変数を生成する方法

1. $u \sim U(0, 1)$ を発生させる.
2. $v = F^{-1}(u)$ は $f(x)$ に従う.

$F^{-1}(u)$: $F(x)$ の逆関数

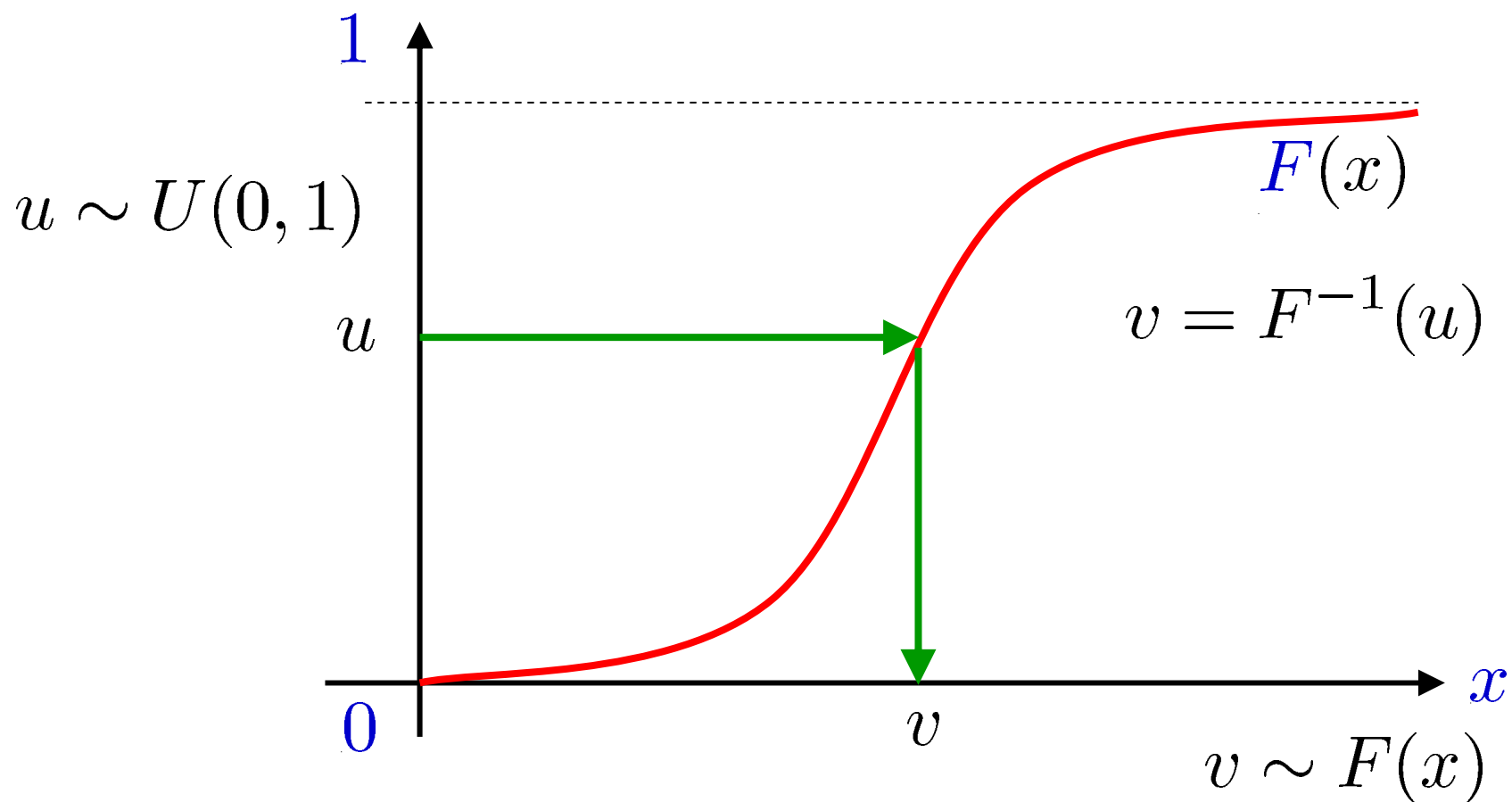
$F(x)$: $f(x)$ の累積分布関数

$$u = F(x) \quad x = F^{-1}(u)$$

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(u) du$$

逆関数法 (続き)

75

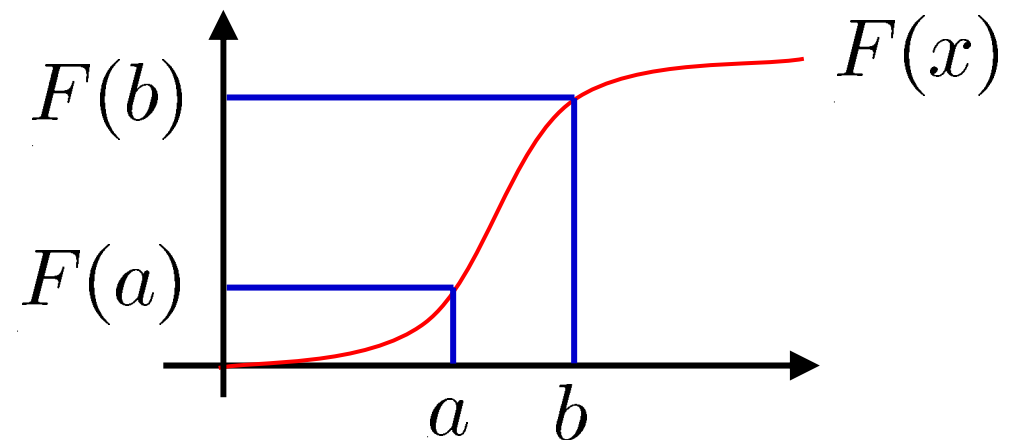


逆関数法(証明)

76

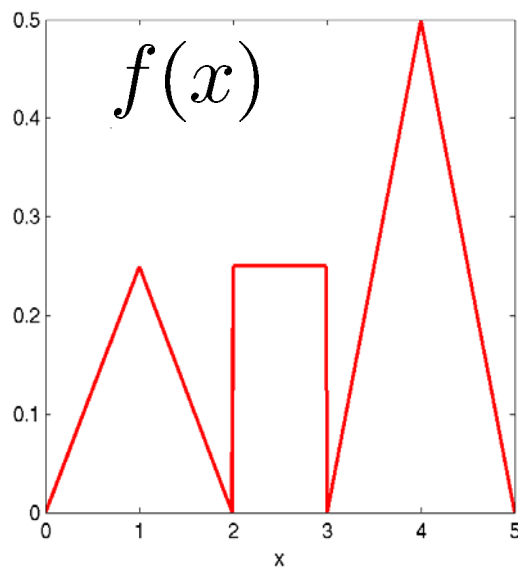
■ $\forall c \ P(v \leq c) = F(c)$ を示す.

$$\begin{aligned} P(v \leq c) &= P(F^{-1}(u) \leq c) && v = F^{-1}(u) \\ &= P(u \leq F(c)) && a \leq b \Rightarrow F(a) \leq F(b) \\ &= P(0 \leq u \leq F(c)) && u \sim U(0, 1) \\ &= F(c) \end{aligned}$$

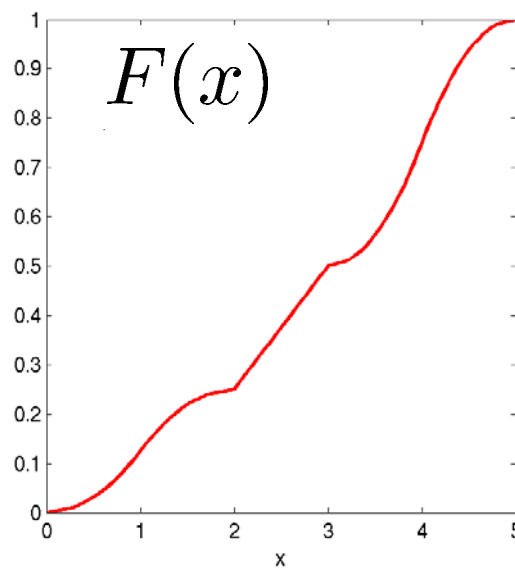


逆関数法による乱数生成の例 77

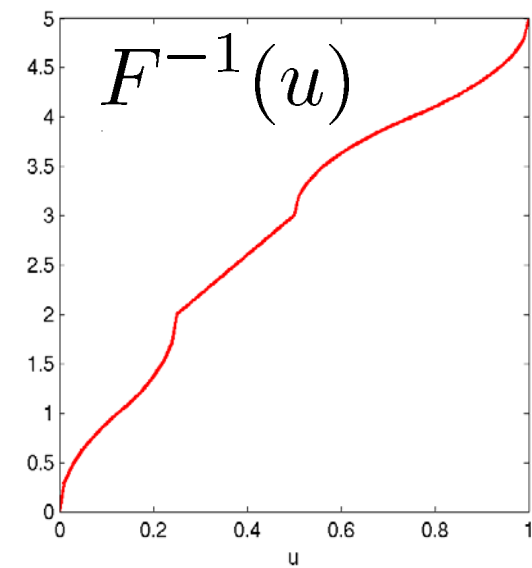
$$x = F^{-1}(u)$$



確率密度関数

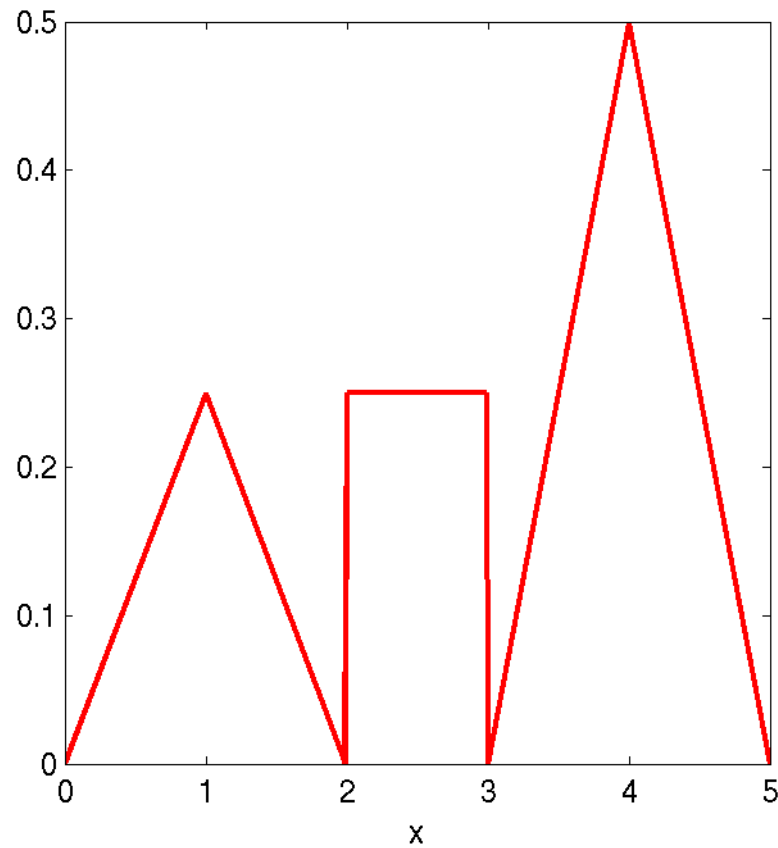


累積分布関数

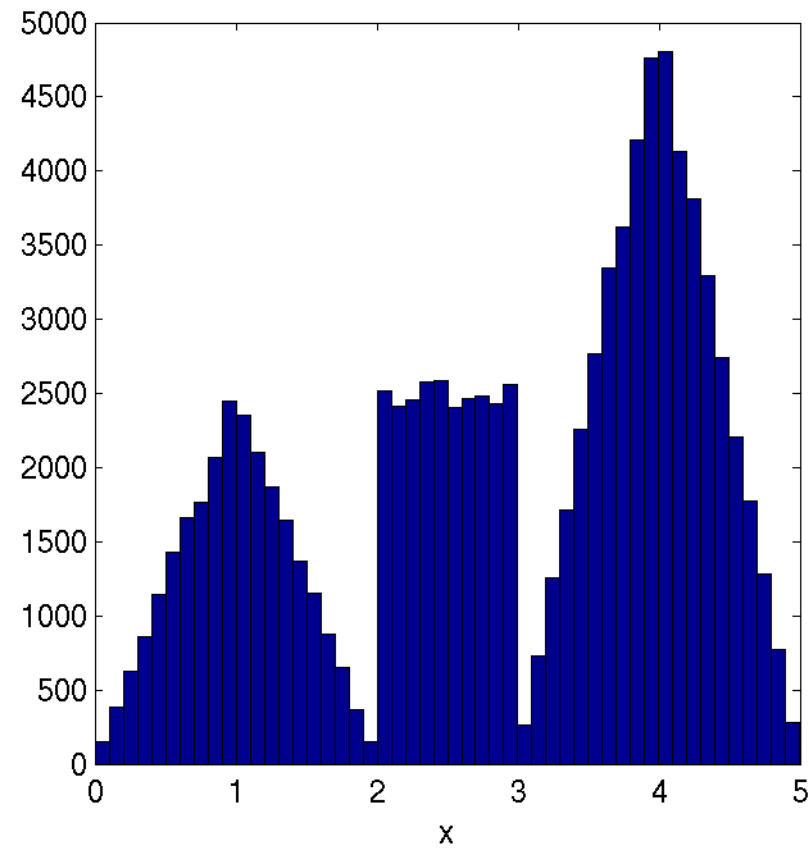


累積分布関数の逆

逆関数法による乱数生成の例 (続き)⁷⁸



確率密度関数



生成した乱数の
ヒストグラム

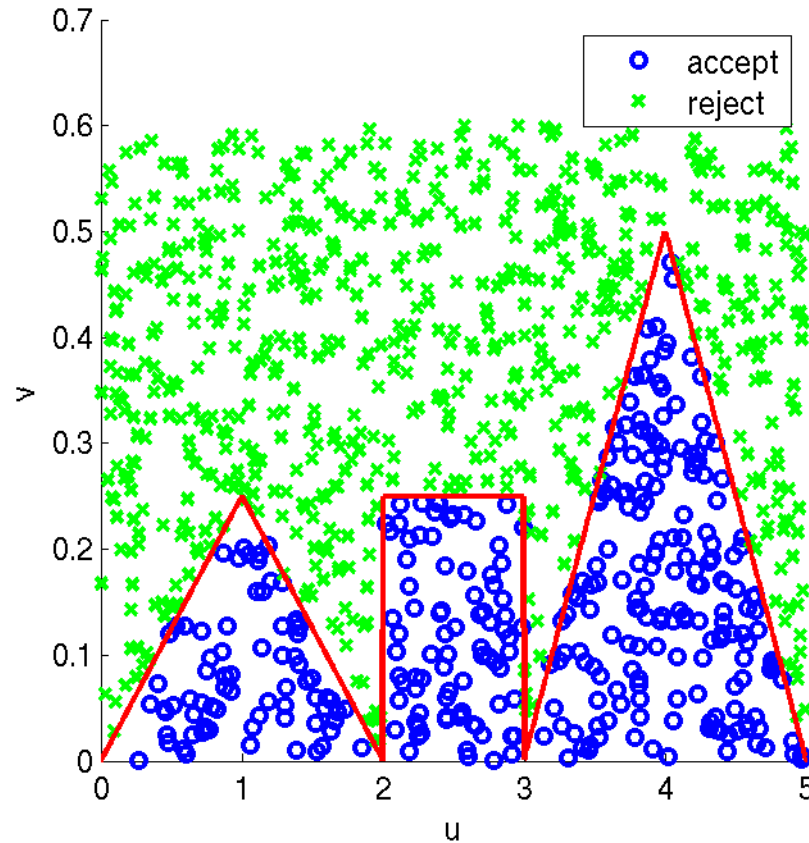
乱数の生成法 2

79

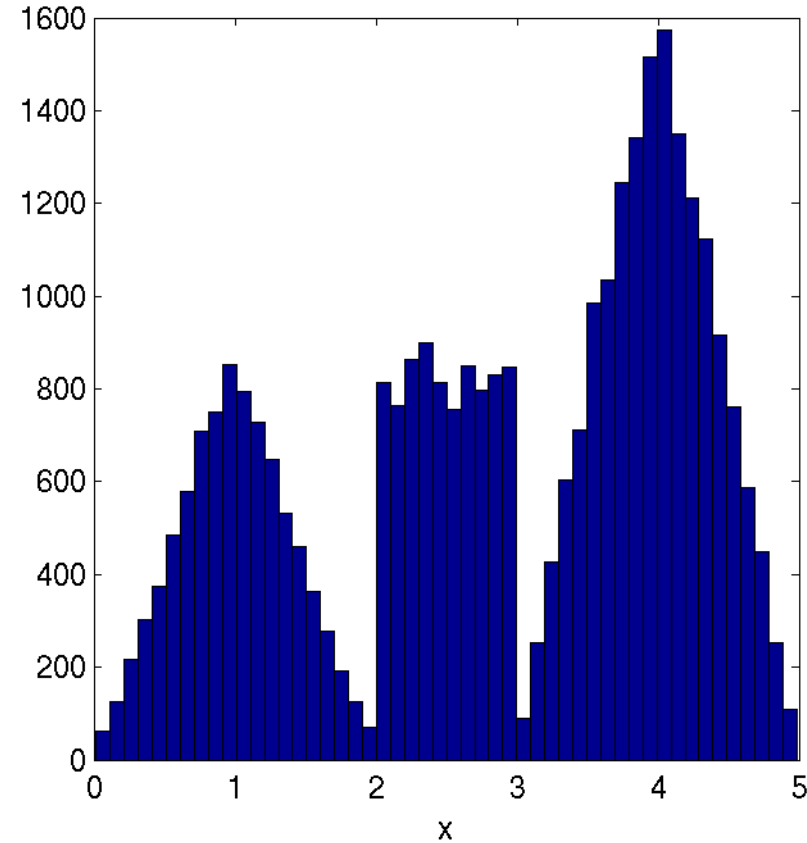
- 棄却法(rejection sampling): 有限区間 $[a, b]$ 上の確率密度関数 $f(x)$ に従う乱数を生成する
 1. $u \sim U(a, b)$ を発生させる .
 2. $v \sim U(0, \max_x f(x))$ を発生させる .
 3. $v \leq f(u)$ ならば u を採択(accept)し, そうでなければ棄却(reject)し, 1. からやり直す .

棄却法による乱数生成の例

80



確率密度関数



生成した乱数の
ヒストグラム

逆関数法と棄却法の問題点

81

■ 逆関数法:

- 逆関数がきれいな形で求まらないことがある.

■ 棄却法:

- 定義域が有限の乱数しか発生させることができない.
- 棄却域が大きい場合, たくさんの乱数を発生させるのに時間がかかる.

- 歪んだ6面体のさいころ(出る目は1, 2, 3, 4, 5, 6)がある. この変なさいころの出る目は

- 平均が2.2
- 分散が1

であるという. チェビシェフの不等式を用いて以下の問いに答えよ.

1. 6が出る確率は最高でいくつか?
2. 1, 2, 3のいずれかが出る確率は最低いくつか?
3. 2が出る確率は最低でいくつか?

連絡事項

83

- 来週の授業は、**情報工学科計算機室**で行う。
<http://www.csc.titech.ac.jp/>
- 内容は、今週の授業で習った乱数の発生法に関する**計算機実習**。
- 計算機演習の資料はあらかじめOCWに公開するので、目を通しておくこと。
- **10時40分**までに情報工学科計算機室に集合すること。
- 情報工学科計算機室の**アカウント**を持っていない学生は実習前(今すぐ)に相談に来ること。