第8回 1階常微分方程式:階数の引き下げ

6月12日(木)

【学習範囲】 『理工系のための解く! 微分方程式』第2章2.6~2.7(pp.26~30) 詳細は本を参照のこと。

⑤ 階数の引き下げ(x が含まれない場合)

解法

2階常微分方程式に x が含まれない場合、 $\frac{dy}{dx} = p$ とおいて $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}p$ \longrightarrow y を独立変数とした p の1階常微分方程式に帰する。 ⑥ 階数の引き下げ(*y*,*y*',*y*'' の同次式)

解法

y,y',y'' について同次式である場合、 $y = ce^{z}$ (cは定数)とおいて、 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx} = ce^{z}\frac{dz}{dx}$ $\frac{d^{2}y}{dx^{2}} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = c\left(e^{z}\frac{dz}{dx}\frac{dz}{dx} + e^{z}\frac{d^{2}z}{dx^{2}}\right) = ce^{z}\left[\left(\frac{dz}{dx}\right)^{2} + \frac{d^{2}z}{dx^{2}}\right]$ ce^{z} がキャンセルされ、x,z',z''の微分方程式に帰着される。

学習範囲の内容をしっかり身につけるため、本の問題を解いてみよう。

平成20年度 解析学(電気電子)(b)講義資料 「線形1階微分方程式の解法(RC・RL回路編)」

2008.6.12

[1] 線形1階微分方程式の解の一般式の導出

[公式]

線形1階微分方程式
$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)\cdots(1)$$
の一般解は式(2)で与えられる。
$$y = e^{-\int P(x)dx} \left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + c_0 \right)\cdots(2)$$

ただし c_0 は定数である。

[導出方法] (定数変化法)

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)\cdots(1) \quad \mathcal{O}Q(x) = 0 \text{ とおき、} ff(y_0) \text{ を求める},$$

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -P(x)y$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = -P(x)$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int P(x)dx$$

$$\log|y| = -\int P(x)dx + k \quad (k|\text{は定数})$$

$$y_0 = k'e^{-\int P(x)dx} \quad (k'=\pm e^k)$$

$$\text{次に、元の微分方程式の解を } y_0 \text{ を用いて } y = c(x)y_0 \text{ とおける} \text{ と仮定し、} c(x) \text{ を求める},$$

$$y = c(x)y_0 \text{ を式(1)}$$

$$\frac{d(cy_0)}{dx} + P(x)cy_0 = Q(x)$$
$$\left(y_0\frac{dc}{dx} + c\frac{dy_0}{dx}\right) + cP(x)y_0 = Q(x)$$
$$y_0\frac{dc}{dx} + c\left(\frac{dy_0}{dx} + P(x)y_0\right) = Q(x)$$

ここで
$$y_0$$
は $\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0$ の解なので、 $\frac{dy_0}{dx} + P(x)y_0 = 0$ だから、
 $y_0 \frac{dc}{dx} = Q(x)$
 $\frac{dc}{dx} = \frac{Q(x)}{y_0} = \frac{Q(x)}{k'e^{-\int P(x)dx}} = \frac{1}{k'}Q(x)e^{\int P(x)dx}$
 $c = \frac{1}{k'}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + c_0 \quad (c_0$ は定数)
 $\therefore y = cy_0 = \left(\frac{1}{k'}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + c_0\right)k'e^{-\int P(x)dx}$
 $= e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + c_0\right)$

[2] RC 回路の解法

① 直流 (DC) 電源

図1に示す RC 回路を考える。初期状態ではス イッチ S が開放であり、キャパシタには電荷が蓄 積されていないとする。

直流電圧源の両端電圧をEとし、時刻t = 0に おいてスイッチSを閉じたとき、時間tに対して 回路に流れる電流i(t)を求めてみよう。





図1 RC 回路(直流電圧源)

$$Ri(t) + \frac{1}{C}\int i(t)dt = E$$

両辺を*t*について微分すると、t = 0以降はEは一定であり $\frac{dE}{dt} = 0$ だから、

$$R\frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0$$

$$\frac{di}{dt} = -\frac{1}{CR}i$$

$$\frac{1}{i}\frac{di}{dt} = -\frac{1}{CR}$$

$$\int \frac{di}{i} = -\frac{1}{CR}\int dt$$

$$\log|i| = -\frac{t}{CR} + k \quad (kli定数)$$

$$i = k'e^{-\frac{t}{CR}} \quad (k' = \pm e^k)$$

$$zz \ ct = 0 \ lz \ sv \ c \neq \gamma \ v \neq \beta \ m \ m$$

$$\mathcal{O}$$
電圧は 0 なので、 $i(0) = \frac{E}{R} \ cb \ d_{\circ}$

$$i(t) = \frac{E}{R}e^{-\frac{t}{CR}}$$

模式的に図示すると図2のようになる。



② 交流 (AC) 電源

図 3 に示す回路に対して電圧の式を立てると以下の通りとなる。ただし $v(t) = V_0 \cos \omega_0 t$ ($t \ge 0$), 0 (t < 0)とおく。

 $Ri(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt = V_0 \cos \omega_0 t$ 両辺をtについて微分すると、 $R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = -\omega_0 V_0 \sin \omega_0 t$

 $\frac{di}{dt} + \frac{i}{CR} = -\frac{\omega_0 V_0}{R} \sin \omega_0 t$





[1]の式(1)の変数 *x* を*t* に置き換えてあてはめると $P(t) = \frac{1}{CR}, Q(t) = -\frac{\omega_0 V_0}{R} \sin \omega_0 t$ なので、式(2)に代入して、

$$= -\frac{CR}{\sqrt{1 + (\omega_0 CR)^2}} \cdot e^{\frac{t}{CR}} \left(\frac{\omega_0 CR}{\sqrt{1 + (\omega_0 CR)^2}} \cos \omega_0 t - \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega_0 CR)^2}} \sin \omega_0 t \right)$$
$$= -\frac{CR}{\sqrt{1 + (\omega_0 CR)^2}} \cdot e^{\frac{t}{CR}} \left(\cos \phi \cos \omega_0 t - \sin \phi \sin \omega_0 t \right) \quad (\tan \phi = \frac{1}{\omega_0 CR})$$
$$= -\frac{CR}{\sqrt{1 + (\omega_0 CR)^2}} \cdot e^{\frac{t}{CR}} \cos(\omega_0 t + \phi)$$
$$\vdots \ \neg \tau,$$
$$i(t) = c_0 e^{-\frac{t}{CR}} + \frac{\omega_0 CV_0}{\sqrt{1 + (\omega_0 CR)^2}} \cos(\omega_0 t + \phi)$$

ここで
$$t = 0$$
において電源の電圧は V_0 であり、キャパシタの蓄積電荷量が 0 なので
 $i(0) = \frac{V_0}{R}$ であるから、上式に代入して、
 $c_0 = \frac{V_0}{R} - \frac{\omega_0 C V_0}{\sqrt{1 + (\omega_0 C R)^2}} \cos\phi = \frac{V_0}{R} - \frac{\omega_0 C V_0}{\sqrt{1 + (\omega_0 C R)^2}} \cdot \frac{\omega_0 C R}{\sqrt{1 + (\omega_0 C R)^2}}$
 $= \frac{V_0}{R} - \frac{V_0}{R} \frac{(\omega_0 C R)^2}{1 + (\omega_0 C R)^2} = \frac{V_0}{R} \frac{1}{1 + (\omega_0 C R)^2}$
 $\therefore i(t) = \frac{V_0}{R} \frac{1}{1 + (\omega_0 C R)^2} e^{-\frac{t}{CR}} + \frac{\omega_0 C V_0}{\sqrt{1 + (\omega_0 C R)^2}} \cos(\omega_0 t + \phi)$

③ 交流回路を
$$v(t) = V_0 e^{j\omega_0 t}$$
とおいて解く

(交流の定常解)。

$$I = \frac{V_o e^{j\omega_0 t}}{R + \frac{1}{j\omega_0 C}} = \frac{j\omega_0 C V_o e^{j\omega_0 t}}{1 + j\omega_0 C R}$$
$$= \frac{j\omega_0 C (1 - j\omega_0 C R) V_o}{1 + (\omega_0 C R)^2} e^{j\omega_0 t}$$
$$= \frac{\omega_0 C (\omega_0 C R + j) V_o}{1 + (\omega_0 C R)^2} e^{j\omega_0 t}$$



$$v(t) = V_0 e^{j\omega_0 t}$$

図4 RC 回路(交流電圧源)

$$= \frac{\omega_0 C V_o}{\sqrt{1 + (\omega_0 C R)^2}} \left(\frac{\omega_0 C R}{\sqrt{1 + (\omega_0 C R)^2}} + j \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega_0 C R)^2}} \right) e^{j\omega_0 t}$$
$$= \frac{\omega_0 C V_o}{\sqrt{1 + (\omega_0 C R)^2}} e^{j\phi} e^{j\omega_0 t} \quad (\tan \phi = \frac{1}{\omega_0 C R})$$
$$= \frac{\omega_0 C V_o}{\sqrt{1 + (\omega_0 C R)^2}} e^{j(\omega_0 t + \phi)}$$

$$i(t) = \frac{\omega_0 C V_o}{\sqrt{1 + (\omega_0 C R)^2}} \cos(\omega_0 t + \phi)$$

この結果は②の定常解の項と一致する。

[3] RL 回路の解法

① 直流 (DC) 電源

図 5 に示す RC 回路を考える。初期状態ではスイッチ S が開放されているとする。 直流電圧源の両端電圧をEとし、時刻t = 0においてスイッチ S を閉じたとき、時間tに 対して回路に流れる電流i(t)を求めてみよう。

時刻t = 0以降において、電流i(t)を用いて電圧に対する式をたてると以下の通りになる。

$$Ri(t) + L\frac{di}{dt} = E$$
$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{E}{L}$$

[1]の式(1)の変数x をtに置き換えてあてはめると





図5 RL 回路(直流電圧源)

ここで*t* = 0 においてインダクタ両端 の電圧は*E* なので、*i*(0) = 0 である。 よって、



$$\frac{E}{R} + c_0 = 0$$

$$c_0 = -\frac{E}{R}$$

$$\therefore i(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

模式的に図示すると図6のようになる。

② 交流 (AC) 電源

図7に示す回路に対して電圧の式を立てると以下の通りとなる。ただし $v(t) = V_0 \cos \omega_0 t$ ($t \ge 0$), 0 (t < 0)とおく。

$$Ri(t) + L\frac{di}{dt} = V_0 \cos \omega_0 t$$
$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{V_0}{L} \cos \omega_0 t$$



[1]の式(1)の変数 $x & \varepsilon t$ に置き換えてあてはめると $P(t) = \frac{R}{L}, Q(t) = \frac{V_0}{L} \cos \omega_0 t$ なので、式(2)に代入して、



図7 RL 回路(交流電圧源)

$$i(t) = e^{-\int \frac{R}{L} dt} \left(\int \left(\frac{V_0}{L} \cos \omega_0 t \right) e^{\int \frac{R}{L} dt} dt + c_0 \right)$$

$$= e^{-\frac{R}{L}t} \left(\frac{V_0}{L} \int e^{\frac{R}{L}t} \cos \omega_0 t dt + c_0 \right)$$

$$P = \int e^{\frac{R}{L}t} \cos \omega_0 t dt \geq \approx \sqrt{\pi} \text{ and } \pi \text{ box}$$

$$P = \int e^{\frac{R}{L}t} \cos \omega_0 t dt = \frac{L}{R} e^{\frac{R}{L}t} \cos \omega_0 t + \frac{L}{R} \omega_0 \int e^{\frac{R}{L}t} \sin \omega_0 t dt$$

$$P = \int e^{\frac{R}{L}t} \cos \omega_0 t dt = \frac{L}{R} e^{\frac{R}{L}t} \cos \omega_0 t + \frac{R}{R} \omega_0 \int e^{\frac{R}{L}t} \sin \omega_0 t dt$$

$$=\frac{L}{R}e^{\frac{R}{L}t}\cos\omega_{0}t + \frac{\omega_{0}L}{R}\left[\frac{L}{R}e^{\frac{R}{L}t}\sin\omega_{0}t - \frac{\omega_{0}L}{R}\int e^{\frac{R}{L}t}\cos\omega_{0}tdt\right]$$

$$=\frac{L}{R}e^{\frac{R}{L}t}\left(\cos\omega_0t+\frac{\omega_0L}{R}\sin\omega_0t\right)-\left(\frac{\omega_0L}{R}\right)^2P$$

 $\left\{1 + \left(\frac{\omega_0 L}{R}\right)^2\right\} P = \frac{L}{R} e^{\frac{R}{L}t} \left(\cos \omega_0 t + \frac{\omega_0 L}{R} \sin \omega_0 t\right)$

$$\therefore P = \frac{L}{R} e^{\frac{R}{L}t} \frac{\cos \omega_0 t + \frac{\omega_0 L}{R} \sin \omega_0 t}{1 + (\frac{\omega_0 L}{R})^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{\omega_0 L}{R})^2}} \frac{L}{R} e^{\frac{R}{L}t} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{\omega_0 L}{R})^2}} \cos \omega_0 t + \frac{\frac{\omega_0 L}{R}}{\sqrt{1 + (\frac{\omega_0 L}{R})^2}} \sin \omega_0 t \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{\omega_0 L}{R})^2}} \frac{L}{R} e^{\frac{R}{L}t} (\cos \phi \cos \omega_0 t + \sin \phi \sin \omega_0 t) (\tan \phi = \frac{\omega_0 L}{R})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{\omega_0 L}{R})^2}} \frac{L}{R} e^{\frac{R}{L}t} \cos(\omega_0 t - \phi)$$

$$\pm \infty \tau,$$

$$i(t) = e^{-\frac{R}{L}t} \left(\frac{V_0}{L} \int e^{\frac{R}{L}t} \cos(\omega_0 t + c_0) \right)$$

$$= c_0 e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{V_0}{L} \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{\omega_0 L}{R})^2}} \frac{L}{R} \cos(\omega_0 t - \phi) = c_0 e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{V_0}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{\omega_0 L}{R})^2}} \cos(\omega_0 t - \phi)$$

ここで
$$i(0) = 0$$
なので、上式に代入して、

$$c_0 = -\frac{V_0}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{\omega_0 L}{R})^2}} \cos\phi = -\frac{V_0}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{\omega_0 L}{R})^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{\omega_0 L}{R})^2}} = -\frac{V_0}{R} \frac{1}{1 + (\frac{\omega_0 L}{R})^2}$$

$$\therefore i(t) = \frac{V_0}{R} \left[-\frac{1}{1 + (\frac{\omega_0 L}{R})^2} e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{\omega_0 L}{R})^2}} \cos(\omega_0 t - \phi) \right]$$

④ 交流回路を
$$v(t) = V_0 e^{j\omega_0 t}$$
とおいて解く

(交流の定常解)。 $I = \frac{V_0 e^{j\omega_0 t}}{R + j\omega_0 L} = \frac{V_0}{R} \frac{1}{1 + \left(j\frac{\omega_0 L}{R}\right)} e^{j\omega_0 t}$ $= \frac{V_0}{R} \frac{1 - \left(j\frac{\omega_0 L}{R}\right)}{1 + \left(\frac{\omega_0 L}{R}\right)^2} e^{j\omega_0 t}$ $\equiv \frac{V_0}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0 L}{R}\right)^2}} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0 L}{R}\right)^2}} - j\frac{\frac{\omega_0 L}{R}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0 L}{R}\right)^2}} - e^{j\omega_0 t}\right)$ $= \frac{V_0}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0 L}{R}\right)^2}} e^{-j\phi} e^{j\omega_0 t} \quad (\tan\phi = \frac{\omega_0 L}{R})$ $= \frac{V_0}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0 L}{R}\right)^2}} e^{j(\omega_0 t - \phi)}$



 $v(t) = V_0 e^{j\omega_0 t}$

図8 RL 回路(交流電圧源)

よって実部をとって*i*(*t*)が求まる。

$$i(t) = \frac{V_0}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0 L}{R}\right)^2}} \cos(\omega_0 t - \phi)$$

[2]の RC 回路と比べると、位相の進み・遅れの関係が逆であることがわかる。