2階斉次線形微分方程式

$\dfrac{d^2y}{dx^2}+P(x)\dfrac{dy}{dx}+Q(x)y=0$ の一般解は

$y=c_1\left(\sum_{i=0}^{\infty}a_ix^i\right)+c_2\left(\sum_{i=0}^{\infty}b_ix^i\right)$ で表せる。

5.1　級数による解法

$$y=\sum_{i=0}^{\infty}a_ix^i=a_0x^0+a_1x^1+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

$$\frac{dy}{dx}=\qquad a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+5a_5x^4+\cdots+(n+1)a_{n+1}x^n+\cdots$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\qquad 2a_2+3\cdot 2a_3x+4\cdot 3a_4x^2+5\cdot 4a_5x^3+\cdots+(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n+\cdots$$

2階斉次線形微分方程式

$\dfrac{d^2y}{dx^2}+P(x)\dfrac{dy}{dx}+Q(x)y=0$ (5.2)にあてはめる

$$y=\sum_{i=0}^{\infty}a_ix^i \qquad (5.1)$$

$$\frac{dy}{dx}=\sum_{i=1}^{\infty}ia_ix^{i-1}=\sum_{i=0}^{\infty}(i+1)a_{i+1}x^i \qquad (5.3)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\sum_{i=2}^{\infty}i(i-1)a_ix^{i-2}=\sum_{i=0}^{\infty}(i+2)(i+1)a_{i+2}x^i \qquad (5.4)$$

$$\sum_{i=0}^{\infty}(i+2)(i+1)a_{i+2}x^i+P(x)\sum_{i=0}^{\infty}(i+1)a_{i+1}x^i$$

$$+Q(x)\sum_{i=0}^{\infty}a_ix^i=0$$

が成り立つように x の各べき係数を0とすることで係数 a_i を定める。

5.2　ベッセルの微分方程式とベッセル関数

v が定数のときベッセルの微分方程式:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-v^2)y=0$$

ここで，$v\geq 0$ とする。級数の方法で解くと

$$J_v(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m+1+v)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+v}$$

第 1 種ベッセル関数

ここで，Γ 関数は

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-t}t^{\alpha-1}dt\ \ (\alpha>0)$$

$$\Gamma(\alpha+1)=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-t}t^{\alpha}dt=\mathrm{e}^{-t}t^{\alpha}\Big|_0^{\infty}+\alpha\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-t}t^{\alpha-1}dt$$

$$=\alpha\Gamma(\alpha)$$

$\Gamma(1)=1$，$\Gamma(2)=\Gamma(1)=1!$

$\Gamma(3)=2\Gamma(2)=2!$，よって

$\Gamma(k+1)=k!\ \ (k=0,1,\cdots)$

$$J_0(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m}$$
$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(m!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m}$$
$$=1-\left(\frac{x}{2}\right)^2+\frac{1}{(2!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^4-\frac{1}{(3!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^6+\cdots$$

同様に

$$J_1(x)=$$
$$\frac{x}{2}\left\{1-\frac{1}{2!}\left(\frac{x}{2}\right)^2+\frac{1}{2!3!}\left(\frac{x}{2}\right)^4-\frac{1}{3!4!}\left(\frac{x}{2}\right)^6+\cdots\right\}$$

連立微分方程式:複数変数の微分方程式

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x-y & (1)\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=2x+4y & (2)\end{cases}$$

(1)より $y=-\dfrac{dx}{dt}+x$ (3)

(3)を微分

$$\frac{dy}{dt}=-\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dx}{dt} \qquad (4)$$

(3)(4)を(2)に代入

$$-\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dx}{dt}=2x+4\left(-\frac{dx}{dt}+x\right)$$

整理して

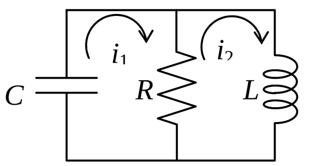
$$\frac{d^2x}{dt^2}-5\frac{dx}{dt}+6x=0$$
$$\lambda^2-5\lambda+6=(\lambda-2)(\lambda-3)=0$$
$$\lambda=2,\ 3$$

よって, $x=c_1e^{2t}+c_2e^{3t}$

式(3)に代入して、

$$y=-(2c_1e^{2t}+3c_2e^{3t})+(c_1e^{2t}+c_2e^{3t})$$
$$=-c_1e^{2t}-2c_2e^{3t}$$

連立微分方程式の回路例



左ループに流れる電流をi_1, 右ループに流れる電流をi_2とする。抵抗 R にはi_1とi_2の差の電流が流れる。

左ループ: $\dfrac{1}{C}\int i_1dt+R(i_1-i_2)=0$ ⋯ (A)

右ループ: $L\dfrac{di_2}{dt}+R(i_2-i_1)=0$ ⋯ (B)

(B)より $\dfrac{di_2}{dt}=-\dfrac{R}{L}(i_2-i_1)=\dfrac{R}{L}i_1-\dfrac{R}{L}i_2=0$ (B')

(1)を微分, $\dfrac{1}{C}i_1+R\left(\dfrac{di_1}{dt}{}_1-\dfrac{di_2}{dt}\right)=0$ ⋯ (A')

(B')を(A')へ代入して整理すると

$$\frac{di_1}{dt}=\left(\frac{R}{L}-\frac{1}{CR}\right)i_1-\frac{R}{L}i_2\cdots \quad (1)$$

$$\frac{di_2}{dt}=\frac{R}{L}i_1-\frac{R}{L}i_2\cdots \quad (2)$$

(1)から, $i_2=-\dfrac{L}{R}\dfrac{di_1}{dt}+\dfrac{L}{R}\left(\dfrac{R}{L}-\dfrac{1}{CR}\right)i_1$ ⋯(3)

(3)を微分して

$$\frac{di_2}{dt}=-\frac{L}{R}\frac{d^2i_1}{dt^2}+\frac{L}{R}\left(\frac{R}{L}-\frac{1}{CR}\right)\frac{di_1}{dt} \quad \cdots(4)$$

(3)(4)を(2)へ代入して整理

$$\frac{d^2i_1}{dt^2}+\frac{1}{CR}\frac{di_1}{dt}+\frac{1}{CL}i_1=0$$

$R=3\Omega,\ L=4\mathrm{H},\ C=\dfrac{1}{12}\mathrm{F}$ として i_1, i_2 を求めよ。

$$\frac{d^2 i_1}{dt^2}+\frac{12}{3}\frac{di_1}{dt}+\frac{12}{4}i_1=\frac{d^2 i_1}{dt^2}+4\frac{di_1}{dt}+3i_1=0$$

より

$$\lambda^2+4\lambda+3=(\lambda+1)(\lambda+3)=0$$

$$\lambda=-1,\ \ -3$$

$$i_1=c_1e^{-t}+3c_2e^{-3t}$$

また

$$i_2=-3c_1e^{-t}-c_2e^{-3t}$$

＊参考：未定係数法

・定係数非斉次：未定係数法（省略）

特殊解を $Y=AR(x)$，A は定数，として(4.1)に代入し，A を決定する。$R(x)=0$ とおいた時の斉次方程式の解 y_1, y_2 と $Y=AR(x)$ を加える。 $y=c_1y_1+c_2y_2+AR(x)$

2階非斉次線形微分方程式の別解法

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P(x)\frac{dy}{dx}+Q(x)y=R(x)\ \ldots(4.1)$$

$\dfrac{d^2y}{dx^2}+P(x)\dfrac{dy}{dx}+Q(x)y=0$ の基本解に加えて

特殊解は右辺 $R(x)$ に応じて次のように置き(4.1)に代入することで求めることができる。

$R(x)$： 特殊解

定数 a： $Y=A$

$a\mathrm{e}^{rx}$： $Y=A\mathrm{e}^{rx}$

ax^n： $Y=A_0x^n+A_1x^{n-1}+\cdots+A_{n-1}x+A_n$

n は正整数

一般解は

$$y=c_1y_1+c_2y_2+Y$$