

2階線形微分方程式

(並進－機械系)

変位 y , バネ定数 k , 重さ w , 重力加速度 g ,

摩擦係数 c

弾性力 $k\left(\frac{w}{k} - y\right) = w - ky$, 摩擦力 $-c\frac{dy}{dt}$,

外力 $F_0 \cos \omega t$, 重力 $-w$

$$\frac{w}{g} \frac{d^2 y}{dt^2} + c \frac{dy}{dt} + ky = F_0 \cos \omega t \quad \cdots(1)$$

(直列－電気系)キルヒホッフの第二法則

電源 E , 抵抗 R , コンデンサ C , インダクタ L が直列接続の回路において

素子両端の電圧: インダクタ: $L \frac{di}{dt}$, 抵抗: Ri ,

コンデンサ: $\frac{1}{C} \int^t i dt$, 印加電圧: $E_0 \cos \omega t$,

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int^t i dt = E_0 \cos \omega t \quad \cdots(2)$$

(微積分方程式)

$Q = \int^t i dt$ とおくことで,

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = E_0 \cos \omega t \quad \cdots(3)$$

初期条件は

$$Q(0) = \int^{t=0} i dt = Q_0, \quad \left. \frac{dQ}{dt} \right|_{t=0} = i(0) = i_0$$

(2)を時間微分すると

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = -\omega E_0 \sin \omega t \quad \cdots(4)$$

初期条件は

$$i(0) = i_0, \quad \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} = i'_0$$

$$\text{なお } \frac{di}{dt} = \frac{1}{L} \left(E_0 \cos \omega t - Ri - \frac{1}{C} \int^t i dt \right) \quad \cdots(5)$$

(並列－電気系)キルヒホッフの第一法則

抵抗 R , コンデンサ C , インダクタ L が並列接続された回路に電流源 I を接続した回路において

素子を流れる電流: インダクタ: $\frac{1}{L} \int^t e dt$, 抵抗:

$\frac{e}{R}$, コンデンサ: $C \frac{de}{dt}$, 印加電流 $I_0 \cos \omega t$

$$C \frac{de}{dt} + \frac{1}{R} e + \frac{1}{L} \int^t e dt = I_0 \cos \omega t \quad \cdots(6)$$

$U = \int^t e dt$ とおくことで,

$$C \frac{d^2 U}{dt^2} + \frac{1}{R} \frac{dU}{dt} + \frac{U}{L} = I_0 \cos \omega t \quad \cdots(7)$$

初期条件は

$$U(0) = \int^{t=0} e dt = U_0, \quad \left. \frac{dU}{dt} \right|_{t=0} = e_0$$

(6)を時間微分すると

$$C \frac{d^2 e}{dt^2} + \frac{1}{R} \frac{de}{dt} + \frac{e}{L} = -\omega I_0 \sin \omega t \quad \cdots(8)$$

初期条件は

$$e(0) = e_0, \quad \left. \frac{de}{dt} \right|_{t=0} = e'_0$$

(1)(3)(4)(7)(8)は本質的に同じ

(並進－機械系)と(直列－電気系)を比較:

質量 $\frac{w}{g} \leftrightarrow$ インダクタンス L

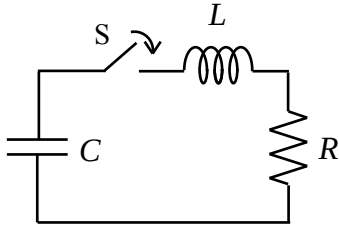
摩擦 $c \leftrightarrow$ 抵抗 R

バネ定数 $k \leftrightarrow$ キャパシタンスの逆数 $1/C$

力 $F \leftrightarrow$ 印加電圧 E (印加電圧の時間微分 E')

変位 $y \leftrightarrow$ 電荷 Q (電流 i)

放電回路—1



コンデンサはスイッチを閉じる前に電圧 V_0 に充電されている(初期電荷 $Q_0 = CV_0$)

(4)式より

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{i}{CL} = 0$$

特性方程式より

$$\lambda^2 + \frac{R}{L} \lambda + \frac{1}{CL} \lambda = 0,$$

$$\lambda = \frac{1}{2} \left\{ -\frac{R}{L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - 4 \frac{1}{CL}} \right\}$$

$$= -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{CL}}$$

よって根の実数部分は常に負。ルート内の符号に応じて3つに分類。

$$R^2 \gtrless 4 \frac{L}{C}$$

① $R^2 > 4 \frac{L}{C}$ (異なる2実根): 過制動

$$i = \frac{V_0}{\omega L} e^{-\frac{R}{2L}t} \sinh \omega t, \quad \omega = \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{CL}}$$

② $R^2 = 4 \frac{L}{C}$ (重根): 臨界制動

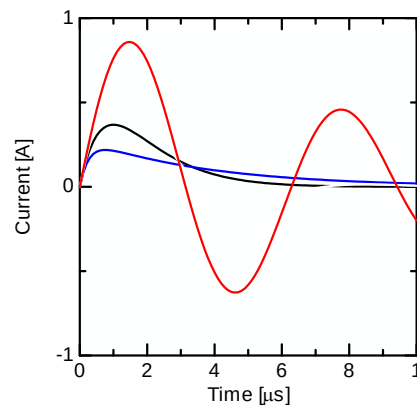
$$i = \frac{V_0}{L} e^{-\frac{R}{2L}t}$$

③ $R^2 < 4 \frac{L}{C}$ (虚根): 減衰振動

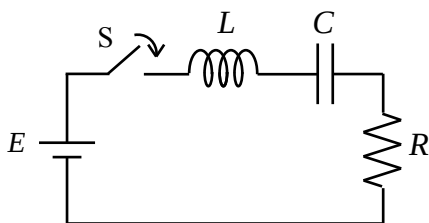
$$i = \frac{V_0}{\omega' L} e^{-\frac{R}{2L}t} \sin \omega' t, \quad \omega' = \sqrt{\frac{1}{CL} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$$

電流波形

青: 過制動, 黒: 臨界制動, 赤: 減衰振動



充電回路—1



$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int^t i dt = E_0 \cos \omega t$$

時間微分すると

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{i}{CL} = 0 \text{ となり, 放電回路と同じ}$$

ただし, 初期条件は

$$i(0) = i_0, \quad \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} = i'_0$$

$$\text{なお } \frac{di}{dt} = \frac{1}{L} \left(E_0 \cos \omega t - Ri - \frac{1}{C} \int^t i dt \right) \quad \cdots (5)$$