2階線形微分方程式

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + P(x) \frac{dy}{dx} + Q(x)y = R(x) \dots(4.1)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + P(x) \frac{dy}{dx} + Q(x)y = 0 \dots(3.1)$$

定理1

y_1, y_2 が(3.1)の解であれば $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ も解である。 c_1, c_2 は任意定数。

定理2 (dy/dx を y' で表す, 別途証明)

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2 \neq 0 \text{ であり,}$$

$\int P(x) dx$ が存在すれば, (3.1)のいかなる解も

$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ とかくことができる。

定理3

Y を(4.1)の任意の解とし, y_1, y_2 が互いに1次独立な(3.1)の解であれば, (4.1)の一般解は

$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + Y$ で与えられる。

注: 微分方程式(3.1)を満足する基本解は無数にあるが, 定理1, 2はその導出方法は与えない。一般的な方法はなく, 1つの解がわかっている場

合はこれと1次独立な他の解を決定できるだけ。

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} \exp\left(-\int P(x') dx'\right) dx \dots(3.9)$$

解き方の整理

- 定係数斉次: 特性方程式
- 非定係数斉次: $y = x^m$ または $y = e^{mx}$ として1つの解を求め, 続いて(3.9)より他方を求める。
- $y = uv$ において標準形に変換して求める・

$$v = \exp\left(-\frac{1}{2} \int P(x) dx\right) \dots(3.11)$$

- 定係数非斉次: 未定係数法(省略)
特殊解を $Y = AR(x)$, A は定数, として(4.1)に代入し, A を決定する。 $R(x) = 0$ とおいた時の斉次方程式の解 y_1, y_2 と $Y = AR(x)$ を加える。 $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + AR(x)$

- 非定係数非斉次: 定数変化法

$R(x) = 0$ とおいた時の斉次方程式の解 y_1, y_2 の定数 c_1, c_2 を変化させ

$y = c_1(x) y_1 + c_2(x) y_2 \dots(4.2)$ とおき, 次式から求める。

$$y = y_1 \int \frac{-Ry_2}{y_1 y_2' - y_1' y_2} dx + y_2 \int \frac{Ry_1}{y_1 y_2' - y_1' y_2} dx + y_1 C_1^0 + y_2 C_2^0$$

定数変化法(1階非斉次線形微分方程式)

(2.8 で求めた公式を導出)

$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x) \dots(A)$ の一般解は, 斉次方

程式: $\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \dots(B)$ の一般解と非斉次方

程式の特殊解の和となる。(B)の一般解は,

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = -p(x) \text{ より, } y = C e^{-\int p(x) dx} \dots(C).$$

非斉次方程式の特殊解は, 一般解(C)の定数 C を $C(x)$ と変化させることで得られると仮定する。

$y_1 = C(x) e^{-\int p(x) dx}$ を(A)に代入する。

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= \frac{dC(x)}{dx} e^{-\int p(x) dx} + C(x) \frac{de^{-\int p(x) dx}}{dx} \\ &= \frac{dC(x)}{dx} e^{-\int p(x) dx} - C(x) p(x) e^{-\int p(x) dx} \\ &= \frac{dC(x)}{dx} e^{-\int p(x) dx} - p(x) y_1 \end{aligned}$$

これを(A)に代入すると

$$\frac{dC(x)}{dx} e^{-\int p(x) dx} = q(x) \text{ より, } \frac{dC(x)}{dx} = q(x) e^{\int p(x) dx}$$

$C(x) = \int q(x) e^{\int p(x) dx} dx + C$ となるから,

$$y_1 = e^{-\int p(x) dx} \left\{ \int q(x) e^{\int p(x) dx} dx + C \right\}$$

第4章 2階非斉次線形微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = R(x) \dots(4.1)$$

$P(x), Q(x), R(x)$ は x のある区間で連続関数

$$\text{斉次方程式 } \frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = 0 \dots(1)$$

の一般解は、 $y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ 。この定数を変化させて $y = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$ とおき、(4.1)を満足するように $c_1(x), c_2(x)$ を定める。

以下簡略表示して $c_1(x)$ を c_1 で表す。

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dc_1}{dx}y_1 + c_1\frac{dy_1}{dx} + \frac{dc_2}{dx}y_2 + c_2\frac{dy_2}{dx}$$

ここで、 $\frac{dc_1}{dx}y_1 + \frac{dc_2}{dx}y_2 = 0 \dots(2)$ と仮定する。ま

た、 d/dx を $'$ で表すと

$$c_1'y_1 + c_2'y_2 = R \dots(3)$$

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 \text{ より, } y' = c_1y_1' + c_2y_2'$$

$$y'' = c_1'y_1' + c_1y_1'' + c_2'y_2' + c_2y_2''$$

これらを(4.1)に代入すると

$$c_1'y_1' + c_1y_1'' + c_2'y_2' + c_2y_2'' + P(c_1y_1' + c_2y_2') + Q(c_1y_1 + c_2y_2) = R$$

$$c_1(y_1'' + Py_1' + Qy_1) + c_2(y_2'' + Py_2' + Qy_2)$$

$$+ c_1'y_1' + c_2'y_2' = R$$

$$y_1, y_2 \text{ は(1)の解だから, } c_1'y_1' + c_2'y_2' = R \dots(4)$$

(3)(4)より、

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1' \\ c_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ R \end{bmatrix}$$

$$c_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ R & y_2' \end{vmatrix}}{W} = \frac{-Ry_2}{y_1y_2' - y_1'y_2} \dots(5)$$

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

$$c_2' = \frac{Ry_1}{y_1y_2' - y_1'y_2} \dots(6)$$

(5)(6)を積分して

$$c_1(x) = \int \frac{-Ry_2}{y_1y_2' - y_1'y_2} dx + C_1^0$$

$$c_2(x) = \int \frac{Ry_1}{y_1y_2' - y_1'y_2} dx + C_2^0$$

以上から非斉次微分方程式の一般解は、 y_1, y_2 を基本解とすれば、

$$y = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2$$

$$= y_1 \int \frac{-Ry_2}{y_1y_2' - y_1'y_2} dx + y_2 \int \frac{Ry_1}{y_1y_2' - y_1'y_2} dx$$

$$+ y_1C_1^0 + y_2C_2^0$$