

2.0 微分方程式の用語

(0) 微分方程式: ある未知関数の導関数を含んだ方程式を微分方程式といい, 未知関数を求めることを微分方程式を解くという。なお $y = f(x)$ で y を従属変数, x を独立変数といい, $f(x)$ の微分を導関数という。

(1) 階数: 方程式中の導関数の最高階数のこと

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = x \text{ は2階微分方程式}$$

(2) 次数: 最高階の導関数の乗数のこと

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + ay = b \text{ は1階2次微分方程式}$$

(3) 線形

1次の未知関数またはその導関数のみを含む

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a \frac{dy}{dx} + by = c : \text{線形}$$

(4) 非線形

1次以外の未知関数かその導関数を含む

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + by = c : \text{非線形}$$

$$\frac{dy}{dx} + \sin y = c : \text{非線形}$$

(5) 一般解:

積分定数(任意定数)を含む形の解

(6) 特殊解

ある条件により積分定数を特定の値にした解

(a) 初期条件(未知関数が $y(t)$ ならば)

ある時刻 t での未知関数値

(b) 境界条件(未知関数が $y(x)$ ならば)

ある位置 x での未知関数値

(7) 常微分方程式

変数が1つの微分方程式

(8) 斉次微分方程式

従属変数と導関数を左辺にまとめた際に右辺が0となる方程式のこと

(9) 非斉次微分方程式

上記(10)で右辺が0とならない方程式

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + P(x) \frac{dy}{dx} + Q(x)y = R(x)$$

(10) 偏微分方程式

偏微分を含む微分方程式, 変数が2つ以上

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial x} = f^2(x,t)$$

2.0 1階常微分方程式

(1) 変数分離型 $\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)}$

(2) 同次形 $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{x}{y}\right)$

(3) 線形 $\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$

積分計算で解の求まる基本例: 解法 (C は任意定数)

$$(1) \int g(y) dy = \int f(x) dx + C$$

$$(2) u = \frac{y}{x} \text{ とおくと } \int \frac{1}{f(u)-u} du = \int \frac{dx}{x} + C = \log|x| + C$$

$$(3) y = e^{-\int p(x)dx} \left\{ \int e^{\int p(x)dx} q(x) dx + C \right\}$$

2.1 ※解法1<直接積分形>

$\frac{dy}{dx} = f(x)$, x で積分して一般解を求める

$y = \int f(x) dx = F(x) + C$ 。初期条件 $y(a) = c_1$ を代入して特殊解を求める。 $C = c_1 - F(a)$ より

2.2 ※解法2<変数分離型>

$g(y) \frac{dy}{dx} = f(x)$ と変形して x で積分,

$\int g(y) \frac{dy}{dx} dx = \int f(x) dx + C$ 。左辺を置換積分し

て, $\int g(y) dy = \int f(x) dx + C$ (一般解)

$$y = \int f(x)dx = F(x) + c_1 - F(a)$$

初期条件 $y(a) = c_1$ を代入。 $C = c_1 - F(a)$ より

$$y = \int f(x)dx = F(x) + c_1 - F(a) \text{ (特殊解)}$$

2.3 ※解法3 $y' = f(\alpha x + \beta y + \gamma)$ 形

$$\frac{dy}{dx} = y' = f(\alpha x + \beta y + \gamma) \text{ は } u = \alpha x + \beta y + \gamma$$

$$\text{とおくと } \frac{du}{dx} = \alpha + \beta \frac{dy}{dx} = \alpha + \beta f(u) \text{ だから,}$$

$$\frac{1}{\beta f(u) + \alpha} \frac{du}{dx} = 1 \text{ より変数分離型に帰着}$$

2.4 ※解法4(前出) <同次形>

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right) \text{ は } \frac{y}{x} = u \text{ と置き換える。 } y = ux \text{ より}$$

$$\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}, \text{ よって } f(u) - u = x \frac{du}{dx} \text{ と変数分}$$

離形にできる。

$$f(u) - u \neq 0 \text{ の場合 } \frac{1}{f(u) - u} \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \text{ より,}$$

$$\int \frac{1}{f(u) - u} du = \int \frac{1}{x} dx,$$

$$G(u) = \log|x| + C, \text{ ここで, } G(u) \text{ は } \frac{1}{f(u) - u} \text{ の}$$

原始関数。 $\frac{y}{x} = u$ より解を求める。

$$f(u) - u = 0 \text{ の場合は, } \frac{du}{dx} = 0 \text{ より, } u = C. \text{ よつ}$$

$$\text{て } y = Cx.$$

2.5 ※解法5 <階数引下> 2 階の常微分方程式のなかに y が含まれない場合

$$\frac{dy}{dx} = p \text{ とおくと } p \text{ の 1 階微分方程式になる}$$

2.6 ※解法6 <階数引下> 2 階の常微分方程式のなかに x が含まれない場合

$$\frac{dy}{dx} = p \text{ とおくと, } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} p \text{ なので}$$

$$y, p, \frac{dp}{dy} p \text{ で表せ } p \text{ の 1 階微分方程式になる}$$

2.7 ※解法7 階数引下 y, y', y'' の同次式

$$y = ce^z \text{ (} c \text{ は定数) とおき,}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \frac{dz}{dx} = ce^z \frac{dz}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left(ce^z \frac{dz}{dx} \right)$$

$$= c \frac{de^z}{dx} \frac{dz}{dx} + ce^z \frac{d^2z}{dx^2} = ce^z \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 + ce^z \frac{d^2z}{dx^2}$$

2.8 線形

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x) \text{ の両辺に } e^{\int p(x)dx} \text{ をかけて整}$$

理して:

$$y = e^{-\int p(x)dx} \left\{ \int e^{\int p(x)dx} q(x) dx + C \right\}$$

(別途導出)