

5.3 ローラン級数展開

正則でない領域を含むときの級数展開
 $f(z)$ が $z = z_0$ を除いて正則のとき

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{-n}}{(z - z_0)^n}$$

$$b_n = \frac{1}{j2\pi} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta$$

複数の特異点をもつ関数のローラン展開:
 領域を分けて級数展開する

例: $f(z) = \frac{1}{z^2 - 1}$ を $z = 1$ で, べき級数展開せよ

$$f(z) = \frac{1}{z-1} \cdot \frac{1}{z+1} \text{ より, } z = \pm 1 \text{ で正則でない。}$$

展開の中心は $z = 1$, この点から展開ができない
 $z = -1$ までの距離は 2。よってここでわけ。

$$(1) |z-1| < 2$$

$\frac{|z-1|}{2} < 1$ を, 展開の中心を含まない項 $\frac{1}{z+1}$ を変
 形して項を作る。

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{z-1}{-2}\right)} \text{ として, } \left|\frac{z-1}{-2}\right| < 1 \text{ なので}$$

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-1}{-2}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{-2}\right)^{n+1} (z-1)^n$$

5.4 特異点の分類

$f(z)$ が $z = z_0$ で正則でない。

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{-n}}{(z - z_0)^n}$$

正則(テイラー展開) 主要部

* z_0 に極または真性特異点をもつ場合はテイラー展開に負のべき乗の項が加わった形になる。

z_0 で正則でないから $f^{(n)}(z_0)$ は存在しない。

$$\phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n \text{ とおくと, } \phi(z) \text{ は } z_0 \text{ で正}$$

$$\text{則で, } f(z) = \phi(z) + \frac{b_{-1}}{z - z_0} + \cdots + \frac{b_{-m}}{(z - z_0)^m} \cdots$$

となる。(なお, b_{-1} を留数という。後述)

$$f(z) = \frac{1}{z-1} \left\{ -\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} (z-1)^n \right\}$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} (z-1)^n$$

$$(2) |z-1| > 2$$

$$\left|\frac{-2}{z-1}\right| < 1 \text{ であるから,}$$

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{z-1} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{-2}{z-1}\right)}$$

$$= \frac{1}{z-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-2}{z-1}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{(z-1)^{n+1}}$$

$$\text{よって, } f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{(z-1)^{n+2}}$$

(A) 除去可能な特異点

$f(z)$ が主要部をもたない場合

(B) m 位の極(主要部が第 m 項までである場合)

$$\frac{b_{-1}}{z - z_0} + \frac{b_{-2}}{(z - z_0)^2} + \cdots + \frac{b_{-m}}{(z - z_0)^m}$$

(C) 真性特異点

主要部が無限個ある

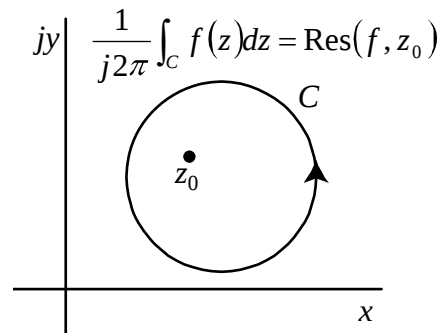
第6章

6.1 留数とは何か

関数 $f(z)$ の特異点 z_0 の周りを周回積分して、その値を $j2\pi$ で割った値

留数: $\text{Res}(f, z_0)$ と表す。

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{j2\pi} \int_C f(z) dz$$



C 内に特異点がなければ積分は 0, 留数も 0

【留数の求め方1】

ローラン展開して -1 次項の係数 b_{-1} を求める。

【留数の求め方2】

1 位の極の留数は, $b_{-1} = (z - z_0) f(z) \Big|_{z=z_0}$

m 位の極の留数は,

$$b_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z - z_0)^m f(z) \right] \Big|_{z=z_0}$$

【留数の求め方3】

$f(z) = \frac{h(z)}{g(z)}$ であって, $h(z)$, $g(z)$ は $z = z_0$ で

正則かつ $g(z_0) = 0$, $g'(z_0) \neq 0$ のとき,

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{h(z_0)}{g'(z_0)}$$

証明の方法

1. ローラン級数展開の両辺を周回積分

2. 1 位極の場合は $\lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0) f(z)]$ より求める。

2 位以上も同様

3. $f(z) = \frac{h(z)}{g(z)}$ の分母を $z = z_0$ でテイラー展開する。

6.2 留数定理

$$\int_C f(z) dz = j2\pi \sum_{i=1}^m \text{Res}(f, z_i)$$

閉曲線 C の内部での $f(z)$ の留数の和
特異点を複数含む周回積分は留数を求め、その和に $j2\pi$ をかければよい。なお積分路が時計回りならば右辺はマイナス

積分路 $C: |z+1| = 3$

内の $z = 1, -3$ に

特異点がある場合

