3.4 調和関数

$f(z)=u(x,y)+jv(x,y)$ が正則であれば，実部 $u(x,y)$，虚部 $v(x,y)$ は調和関数であり，互いに他の共役調和関数である。調和関数は2次元ラプラスの方程式を満足する。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\,,\quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0 \qquad (3.3)$$

証明

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right)=-\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}$$

u, v は連続であるため偏微分の順番を入れ替えて $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ となる。他方も同様。

共役調和関数から作る正則関数

手順① $u(x,y)$ は調和関数か

② コーシー・リーマンの関係式から積分して $v(x,y)$ を導出

③ 正則関数は $f(z)=u(x,y)+jv(x,y)$

例 3.12 $u=x^2-y^2$ は調和関数であることを示し，u を実部とする正則関数を求めよ。

第 4 章

4.1 実変数 t の複素関数の積分

$w(t)=u(t)+jv(t)$，区間 $a\le t\le b$ (実数)

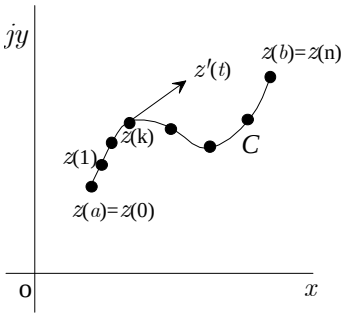
$$\int_a^b w(t)dt=\int_a^b u(t)dt+j\int_a^b v(t)dt$$

実数と複素数とに分けて定積分すればよい。

$$\int_0^{\pi/4} e^{jt}dt=\int_0^{\pi/4}\cos t dt+j\int_0^{\pi/4}\sin t dt$$

$$=\left[\sin t\right]_0^{\pi/4}+j\left[-\cos t\right]_0^{\pi/4}=\frac{1}{\sqrt{2}}+j\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

4.2 複素関数の積分



曲線 C を $n+1$ 分割して折れ線近似し，各点を z_k とする。

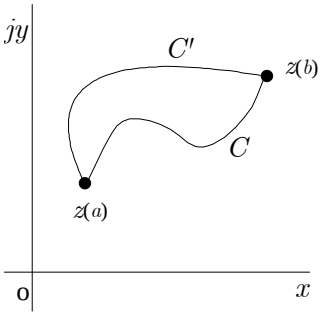
$S_n=\sum_{k=1}^{n} f(z_k)(z_k-z_{k-1})$ を $|\Delta z_k|=|z_k-z_{k-1}|\to 0$ とする。

曲線 C（積分路）に沿う複素積分：$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\int_C f(z)dz$

不定積分：正則な関数 $f(z)$ に対して $F'(z)=f(z)$ となる $F(z)$

$$\int_C f(z)dz=F\{z(b)\}-F\{z(a)\}$$

線積分と積分路



線積分

$$\int_C f(z)\,dz=\int_C (u+jv)(dx+jdy)=\int_C (udx-vdy)+j\int_C (vdx+udy)$$

積分路

$C: z(t)=x(t)+jy(t)\quad (a\le t\le b)$，$t$：媒介変数

また，$z=z(t)$ に対し，$\frac{dz}{dt}=\frac{dx}{dt}+j\frac{dy}{dt}$，$\frac{dz}{dt}dt=dx+jdy$ より

$$\int_C f(z)\,dz=\int_a^b f(z(t))\frac{dz(t)}{dt}dt$$

積分公式 p.102

$$\int_C \left(f(z)+g(z) \right) dz = \int_C f(z)\,dz + \int_C g(z)\,dz$$

$\int_C kf(z)dz = k\int_C f(z)dz$，$k$は定数,

$\int_a^b f(z)\,dz = -\int_b^a f(z)\,dz$　または,

$\int_{-C} f(z)dz = -\int_C f(z)dz$

$\int_a^b f(z)\,dz = \int_a^m f(z)\,dz + \int_m^b f(z)\,dz$,

a,b,mはC上の点

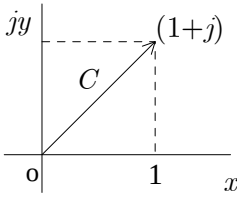
$\int_{C_1+C_2} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz$　，　C_1+C_2はC_1の終点とC_2の始点をつなげた曲線

$\left|\int_C f(z)dz\right| \le ML$，ここで$|f(z)| \le M$，$L$は$C$の長さで図 4.1 の接線$z'(t)$から

$$L = \int_a^b |z'(t)|\,dt = \int \sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt$$，ただし

$z(t) = x(t) + jy(t)$

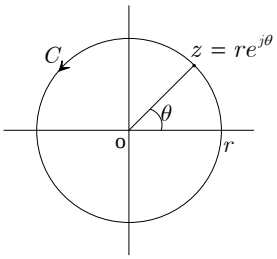
4.3 積分路の表し方



$\int_C z^2 dz$，C：$z(t) = (1+j)t$ $(0 \le t \le 1)$

$dz = (1+j)dt$，$f(z) = z^2 = (1+j)^2 t^2$より

$$\int_C z^2 dz = \int_0^1 (1+j)^2 t^2 (1+j)dt = (1+j)^3 \int_0^1 t^2 dt = (1+j)^3 \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = (1+j)^3 \frac{1}{3}$$



$\int_C z^2 dz$，C：$z = re^{j\theta}$（$0 \le \theta \le 2\pi$または$\theta : 0 \to 2\pi$）

$dz = jre^{j\theta} d\theta$

$$\int_C z^2 dz = \int_0^{2\pi} r^2 e^{j2\theta} jre^{j\theta} d\theta = jr^3 \left[\frac{1}{j3} e^{j3\theta}\right]_0^{2\pi} = 0$$

よく使う積分例　p.109

$\int_C \frac{1}{(z-a)^n} dz$，$C$：中心$z = a$，半径$r$の円，$C$は，$z = a + re^{j\theta}$，

積分の方向は正方向（反時計回り），積分範囲は$0 \le \theta \le 2\pi$，$dz = jre^{j\theta} d\theta$

(1) $n = 1$の場合

$$\int_C \frac{1}{z-a} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{j\theta}} jre^{j\theta} d\theta = j\int_0^{2\pi} d\theta = j\left[\theta\right]_0^{2\pi} = j2\pi$$

(2) $n \ne 1$の場合$(n = 2,3,\cdots)$は

$$\int_C \frac{1}{(z-a)^n} dz = \frac{j}{r^{n-1}} \int_0^{2\pi} e^{-j(n-1)\theta} d\theta = \frac{j}{r^{n-1}} \left[-\frac{1}{j(n-1)} e^{-j(n-1)\theta} \right]_0^{2\pi} = 0$$

＊$n = 1$の場合のみ$j2\pi$，$n = 2,3,\cdots$の場合は 0 となり，留数の計算で利用