第 2 章のまとめ（第 2 回の内容）

- 複素関数（u, v は実関数）
  $f(z) = w(x, y) = u(x, y) + jv(x, y)$
- 複素関数の級数定義（指数，三角関数等）
  オイラーの公式（複素数版）
- 周期性（$j2\pi$），多価関数

第 3 回の内容（第 3 章）

- 複素関数の微分
- 正則関数
- コーシー・リーマンの関係式

3.1 正則関数とは

複素平面上の点 z_0 とその近傍で，$f(z)$ が微分可能であるとき，$f(z)$ は z_0 で正則であるといい，$f(z)$ を正則関数という。微係数が存在しない点を特異点という。

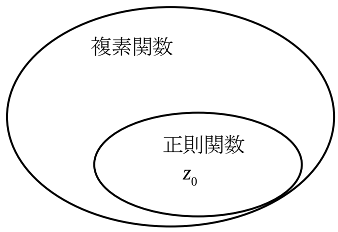
$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad \text{または}$$

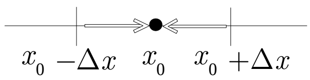
$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

z_0 で正則：

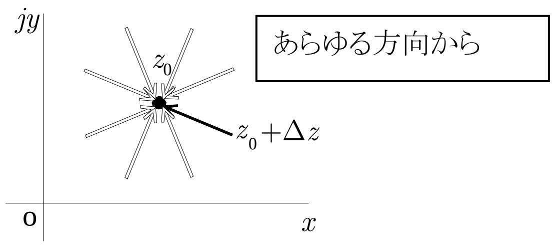
z_0 および $|z - z_0| < \delta$（近傍）で $f'(z)$ が存在

$f(z)$ が正則：すべての z で $f'(z)$ が存在





実関数



複素関数

微分公式 (p68)

1. $\dfrac{dz^n}{dz} = nz^{n-1} \quad (n = 1, 2, \cdots)$

2. $\dfrac{d}{dz}\{f(z)g(z)\} = \dfrac{df(z)}{dz}g(z) + f(z)\dfrac{dg(z)}{dz}$

$$\left\{\frac{f(z)}{g(z)}\right\}' = \frac{g(z)f'(z) - f(z)g'(z)}{|g(z)|^2}$$

3. $f(z)$ と $g(z)$ の合成関数 $f(g(z))$ があり，全てが微分可能ならば，

$$\frac{d}{dz}f(g(z)) = \frac{df}{dg}\frac{dg}{dz} = f'\{g(z)\}g'(z)$$

5. $f(z)$，$g(z)$ が z_0 で正則かつ，
   $f(z_0)$=$g(z_0) = 0$, $g(z_0) \neq 0$ ならば

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)} \quad \text{：ド・ロピタルの公式}$$

3.2 コーシー・リーマンの関係式（偏微分方程式）

複素関数 $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ の $u(x, y)$，$v(x, y)$ が連続な偏導関数を持つ場合，関数 $f(z)$ が正則であるための必要十分条件：

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (3.1)$$

正則関数の微分は，次式：

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + j\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - j\frac{\partial u}{\partial y} \quad (3.2)$$

コーシーリーマンの関係式が正則関数であるための必要条件であることの証明は教科書 P74

正則関数を作る

$f(z)=(x^2+ay^2)+jbxy$ が正則関数となるように実定数 a,b を定める。ただし，$z=x+jy$。

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x=\frac{\partial v}{\partial y}=bx$$ だから，$b=2$，

$$\frac{\partial u}{\partial y}=2ay=-\frac{\partial v}{\partial x}=-by$$ だから

$a=-b/2=-1$

3.3 関数の正則性確認と微分（導関数）

例：$f(z)=z^2$

$z=x+jy$ とおけば

$z^2=(x+jy)^2=x^2-y^2-j2xy$，

$f(z)=u+jv$ より $u=x^2-y^2$，$v=2xy$。

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x,\ \frac{\partial v}{\partial y}=2x,\ \frac{\partial u}{\partial y}=-2y,\ \frac{\partial v}{\partial x}=2y$$

コーシー・リーマンの関係式が成り立つ：正則。

偏導関数は連続のため関数 $f(z)=z^2$ は正則

導関数は(3.2)式から

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+j\frac{\partial v}{\partial x}=2x+j2y=2z。$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \quad (3.1)$$

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+j\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-j\frac{\partial u}{\partial y} \quad (3.2)$$

$W(z,\overline{z})$ による正則性の判定

$z=x+jy$，$\overline{z}=x-jy$ より

$$x=\frac{z+\overline{z}}{2},\ y=\frac{z-\overline{z}}{2j}$$

任意の複素関数 W を $W(z,\overline{z})$ で表したとき，

$$\frac{\partial W(z,\overline{z})}{\partial \overline{z}}=0$$ であれば $W(z,\overline{z})$ は正則。

＊ $\overline{z}$ を含まず z のみで表される

例 $f(x,y)=x^2-y^2+j2xy$

$$f(x,y)=x^2-y^2+j2xy$$
$$=(\frac{z+\overline{z}}{2})^2-(\frac{z-\overline{z}}{2j})^2+j2\frac{z+\overline{z}}{2}\frac{z-\overline{z}}{2j}$$
$$=\frac{1}{4}(z^2+\overline{z}^2+z^2+\overline{z}^2)+\frac{1}{4}(2z^2-2\overline{z}^2)=z^2$$