第 1 回の内容
- 複素数と複素平面　$x+jy$
- 極座標表現　$r(\cos\theta + j\sin\theta)$
- 偏角と主値　$\mathrm{Arg}\,z + 2n\pi = \theta + 2n\pi$（$n$:整数）
- オイラーの公式　$\mathrm{e}^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$
- ベキ乗根　$z = \sqrt[n]{R}\mathrm{e}^{j\left(\frac{\Theta}{n}+\frac{2m\pi}{n}\right)}$（$m = 0,1,2,\cdots n-1$）

第 2 回の内容（第 2 章）
- 実関数，2 変数関数
- 複素関数
- 級数定義
- 周期性
- 指数，三角，双曲線，対数，べき
- 多価関数，一価関数

2.1 実関数

指数関数　$y = a^x$

対数関数　$y = \log_a x$　（自然対数 $\log x$ ）

三角関数　$y = \sin x$， $\cos x$， $\tan x$

逆三角関数　$y = \sin^{-1} x$， $\cos^{-1} x$， $\tan^{-1} x$

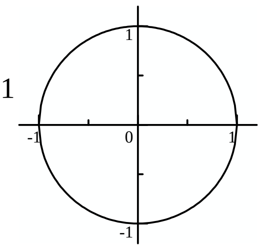
双曲線関数 $\cosh x = \dfrac{e^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$， $\sinh x = \dfrac{e^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$

2 変数関数（実関数）

例： $f(x,y) = x^2 + y^2 = r^2$

変形すると $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$

$x^2 + y^2 = 1$

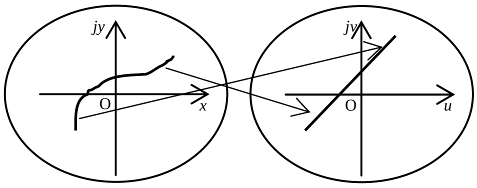


2.2 複素関数とは

2 つの複素平面上の点または線を対応づける関数のこと

z 平面上： $z = x + jy$

w 平面上： $w(x,y) = u(x,y) + jv(x,y)$



例： $f(z) = z^2$，ただし $z = x + jy$ の $y = x$ とする

$f(z) = u + jv$

$z^2 = (x+jy)^2 = (x^2 - y^2) + j2xy$

実部，虚部を比較

$u = x^2 - y^2$， $v = 2xy$

$y = x$ を代入すると， $u = 0$， $v = 2x^2$ となり

$z = (1+j)x \Leftrightarrow f(z) = 2jx^2$

2.3 指数関数（底は e とする）

級数定義

$$f(\mathrm{z}) = \mathrm{e}^{\mathrm{z}} = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \cdots + \frac{1}{n!}z^n + \cdots$$

積演算の確認

$$\mathrm{e}^{\mathrm{z}_1} \times \mathrm{e}^{\mathrm{z}_2}$$
$$= \left(1 + \mathrm{z}_1 + \frac{1}{2}\mathrm{z}_1{}^2 + \cdots\right)\left(1 + \mathrm{z}_2 + \frac{1}{2}\mathrm{z}_2{}^2 + \cdots\right)$$
$$= 1 + (\mathrm{z}_1 + \mathrm{z}_2) + \frac{1}{2}(\mathrm{z}_1 + \mathrm{z}_2)^2 + \cdots \frac{1}{n!}(\mathrm{z}_1 + \mathrm{z}_2)^n +$$
$$= \mathrm{e}^{\mathrm{z}_1 + \mathrm{z}_2}$$

指数関数の周期性

$f(\mathrm{z}) = \mathrm{e}^{\mathrm{z}} = \mathrm{e}^{\mathrm{x+jy}} = \mathrm{e}^{\mathrm{x}}\mathrm{e}^{\mathrm{jy}} = \mathrm{e}^{\mathrm{x}}(\cos y + j\sin y)$

$\cos y, \sin y$ は 2π の周期関数

よって， e^{z} も周期関数となる。

例： $\mathrm{e}^{z} = 1$ の解

$1 = \mathrm{e}^{j2n\pi}$ だから， $z = j2n\pi$（n は整数）

無限通りの解がある。

2.4 三角関数

級数定義 （mは自然数）

$f(z)$=cosz

$$=1-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{24}z^4-\cdots+(-1)^m\frac{1}{(2m)!}z^{2m}+\cdots$$

$f(z)$=sinz

$$=z-\frac{1}{6}z^3+\frac{1}{120}z^5-\cdots+(-1)^m\frac{1}{(2m+1)!}z^{2m+1}+\cdots$$

指数関数表示（オイラーの公式複素数発展型）

$$\cos z=\frac{e^{jz}+e^{-jz}}{2}, \quad \sin z=\frac{e^{jz}-e^{-jz}}{j2}$$

加法定理が成り立つ

$$\cos(z_1\pm z_2)=\cos z_1\cos z_2\mp\sin z_1\sin z_2$$

$$\sin(z_1\pm z_2)=\sin z_1\cos z_2\pm\cos z_1\sin z_2$$

逆三角関数

$f(z)=\sin^{-1}z$, $\cos^{-1}z$, $\tan^{-1}z$

2.5 双曲線関数

定義　$\cosh z=\dfrac{e^z+e^{-z}}{2}$, $\sinh z=\dfrac{e^z-e^{-z}}{2}$

$e^z=\cosh z+\sinh z$, $e^{-z}=\cosh z-\sinh z$

$\cosh^2 z-\sinh^2 z=1$

双曲線関数と三角関数の関係

$\cosh z=\cos(jz)$, $\sinh z=-j\sin(jz)$

$\cos z=\cosh(jz)$, $\sinh(jz)=j\sin z$

$$\cosh(z_1\pm z_2)=\cosh z_1\cosh z_2\pm\sinh z_1\sinh z_2$$

$$\sinh(z_1\pm z_2)=\sinh z_1\cosh z_2\pm\cosh z_1\sinh z_2$$

2.6 対数関数

指数関数の逆関数として定義

$f(z)=w=e^z$より，$z=\log w$, 変数を入れ替え

$w=\log z$

$$\log z=\log(re^{j\theta})=\log r+j(\theta+2n\pi)$$

多価関数:1 つの変数に対して複数の値を取る

$n=0$の値を主値といい，大文字で表す

$$\log z=\mathrm{Log}\,z+j2n\pi$$

2.7 べき関数

$f(z)=z^c=(e^{\log z})^c=e^{c\log z}$

cは複素数，$z\neq 0$

$z^c=e^{c\,\mathrm{Log}\,z}$を主値という

多価関数