第1回の内容
- 講義の予定
- 講義の概要

- 複素数
- 複素関数
- オイラーの公式

前半:複素関数
強制振動を簡単に解くことができる
ラプラス, フーリエ変換などの逆変換ができる
量子力学にはなくてはならない関数

後半:微分方程式
時間変化, 位置変化の過渡減少が解ける
ガリレオの結論が正しい範囲がわかる
強制振動(ダンパーやLRC回路)が解ける

1.1 複素数とは何か

複素数 $z = x + jy$,(x , y :実数, j 虚数単位)

$j = \sqrt{-1}\ \left(j^2 = -1\right)$

実数　自然数(正の整数)
　　負の整数
　　ゼロ
　　有理数(m/n, m,n は整数)
　　無理数($\sqrt{2}, e, \pi$ など)

四則演算

$z_1 = x_1 + jy_1$, $z_2 = x_2 + jy_2$

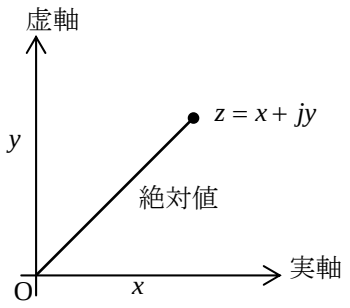
$z_1 \pm z_2 = (x_1 + x_2) \pm j(y_1 + y_2)$　複号同順

$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + j(x_1 y_2 + x_2 y_1)$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{x_1^{\ 2} + y_1^{\ 2}}\left\{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + j(x_1 y_2 - x_2 y_1)\right\}$$

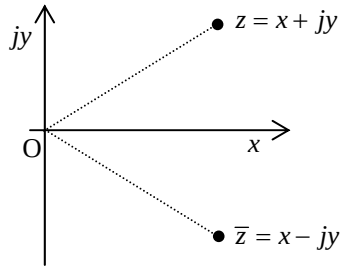
ただし $z_1 \neq 0$

1.2 複素平面



共役複素数

$\overline{z} = x - jy$



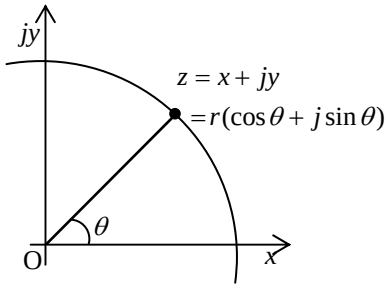
絶対値: $|z| = |x + jy| = \sqrt{x^2 + y^2}$

実部の大きさ: $x = \mathrm{Re}(z)$
虚部の大きさ: $y = \mathrm{Im}(z)$

$|z|^2 = |x + jy|^2 = z \cdot \overline{z}$

$x = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$, $y = \dfrac{z - \overline{z}}{2j}$

1.3 極座標表現とオイラーの公式



$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$

$r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$

$\theta = \mathrm{Arg}\, z = \tan^{-1}\dfrac{y}{x}$　$-\pi \leq \theta \leq \pi$, または $0 \leq \theta \leq 2\pi$

偏角: $\mathrm{Arg}\, z + 2n\pi$ (n :整数)または $\theta + 2n\pi$
偏角の主値: $\mathrm{Arg}\, z$ または θ

四則演算と共役複素数

$\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z}_1 \pm \overline{z}_2$

$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2$

$\overline{\left(\dfrac{z_2}{z_1}\right)} = \dfrac{\overline{z}_2}{\overline{z}_1}$

オイラーの公式 （マクローリン展開で証明）

$\mathrm{e}^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$

よって,

$z = x + jy = r(\cos\theta + j\sin\theta) + r\mathrm{e}^{j\theta}$

$\cos\theta = \dfrac{\mathrm{e}^{j\theta} + \mathrm{e}^{-j\theta}}{2}$

$\sin\theta = \dfrac{\mathrm{e}^{j\theta} - \mathrm{e}^{-j\theta}}{2j}$

1.4 べき乗とベキ乗根

z のべき乗: z を n 乗した結果

$z = r\,\mathrm{e}^{j\theta}$ とおく（べき乗の時は極座標形式）

$z^n = r^n\,\mathrm{e}^{jn\theta} = r^n\cos(n\theta) + jr^n\sin(n\theta)$

$\left(r\,\mathrm{e}^{j\theta}\right)^n = \left(\cos\theta + j\sin\theta\right)^n$ だから,

$\left(\cos\theta + j\sin\theta\right)^n = \cos(n\theta) + j\sin(n\theta)$

:ド・モアブルの公式

ベキ乗根

$z^n = Z$ のとき，z を Z のべき乗根という，または

z は Z の n 乗根という。

$z = r\,\mathrm{e}^{j\theta}$ ，$Z = R\,\mathrm{e}^{j\Theta}$ とおくと,

$z^n = r^n\,\mathrm{e}^{jn\theta} = R\mathrm{e}^{j\Theta}$ ，よって

$r = \sqrt[n]{R}$ ，$n\theta = \Theta + 2m\pi$ $(m = 0,1,2,\cdots n-1)$

$\theta = \dfrac{\Theta}{n} + \dfrac{2m\pi}{n}$ $(0 \le \theta \le 2\pi)$ 。いじょうから

$z = \sqrt[n]{R}\mathrm{e}^{j\left(\frac{\Theta}{n} + \frac{2m\pi}{n}\right)}$ ，$(m = 0,1,2,\cdots n-1)$