５．４　回路の過渡応答

回路解析にラプラス変換を用いると、初期値を設定して解くことができ、過渡現象を解くことができる。ラプラス変換もフーリエ変換も同じように表を用いて解析解を得ることは可能である。初期値を取り込んだ解析ができるかどうかに両者の差が現れる。

例題を解いてみよう。回路の構成要素である L、C、R では、その両端の電圧 $v(t)$ とそれに流れる電流 $i(t)$ との関係は次のようになっている。回路の記法として電圧を計る向きは電流が流れる方向と逆にとる。

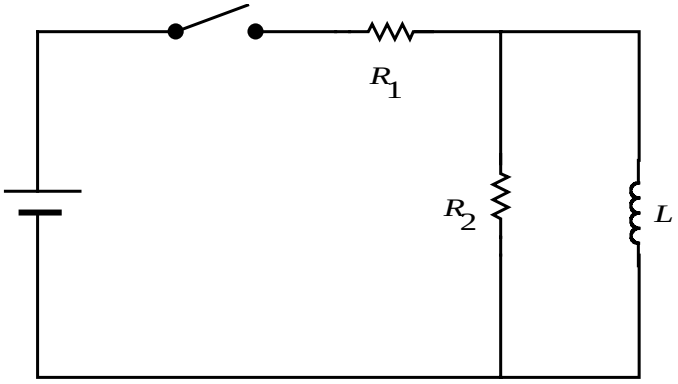
$$v(t) = Ri(t) \quad v(t) = L\frac{d}{dt}i(t) \quad i(t) = C\frac{d}{dt}v(t)$$

これらをラプラス変換する。$\mathscr{L}[v(t)] = V(s)$、$\mathscr{L}[i(t)] = I(s)$ として、**5.2** で述べた性質を用いると次のようになる。

$$V(s) = RI(s) \quad V(s) = L\left(sI(s) - i(0_)\right) \quad I(s) = C\left(sV(s) - v(0_)\right)$$

ここで $i(0_)$ および $v(0_)$ はスイッチオン直前の電流値および電圧値である。ラプラス変換の積分の下限は－ε　（ε >0）とする。ここで初期条件が取り込まれる。

次の例題を解いてみる。



L を流れる電流を $i(t)$ として、これを求めることにする。両端の電圧は　$v(t) = L\dfrac{di}{dt}$、R_2 に流れる電流は　$i_2(t) = \dfrac{v}{R_2} = \dfrac{L}{R_2}\dfrac{di}{dt}$、両方合わせた電流が R_1 を通り、そこでの電圧降下は　$v_1(t) = R_1\left(i + \dfrac{L}{R_2}\dfrac{di}{dt}\right)$　であるから、全体の微分方程式は、$R_1\left(i + \dfrac{L}{R_2}\dfrac{di}{dt}\right) + L\dfrac{di}{dt} = EY$

この方程式をラプラス変換して

$$R_1\left(I + \frac{L}{R_2}\left(sI - i(0_)\right)\right) + L\left(sI - i(0_)\right) = \frac{E}{s}$$

これを I について解くと、

$$I=\frac{E}{L\left(\frac{R_1}{R_2}+1\right)}\frac{1}{s\left(s+\frac{1}{L\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_1}\right)}\right)}+\frac{i(0_-)}{s+\frac{1}{L\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_1}\right)}}=\frac{E}{R_1}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\frac{1}{L\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_1}\right)}}\right)+\frac{i(0_-)}{s+\frac{1}{L\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_1}\right)}}$$

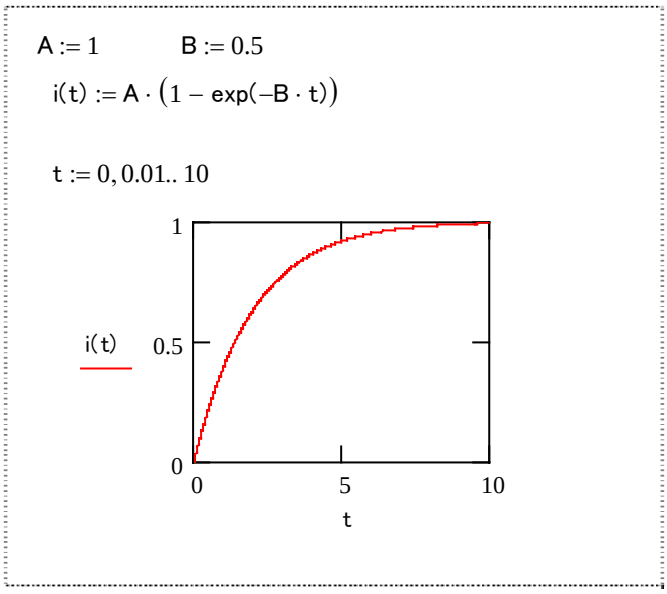
これをラプラス逆変換して

$$i=\frac{E}{R_1}\left(Y-\exp\left(-\frac{1}{L\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_1}\right)}t\right)\right)+i(0_-)\exp\left(-\frac{1}{L\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_1}\right)}t\right)=\frac{E}{R_1}Y+\left(i(0_-)-\frac{E}{R_1}\right)\exp\left(-\frac{1}{L\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_1}\right)}t\right)$$

最初スイッチが開いていて、t=0 で E の電圧が加わる場合を考える。t<0 ではスイッチは十分に長い時間開いていたとすると回路のどこにも電流は流れていない。そこで初期条件は $i(0_-)=0$ である。これを代入すると、インダクタを流れる電流は、t>0 で

$$i=\frac{E}{R_1}\left(1-\exp\left(-\frac{1}{L\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_1}\right)}t\right)\right)$$

となる。電流は零から直線的に上昇し、飽和しはじめ、最終値 E/R_1 に近づいていく。最終値の(1-1/e)に到達するまでの時間は $L\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_1}\right)$ である。



演習 **5.4.1**　ラプラス変換を用いずに、例題を解いてみよ。

演習 **5.4.2**　例題の回路について、スイッチは元々閉じていて、t=0 で開いた場合のインダクタに流れる電流値、インダクタ両端に発生する電圧を求めよ。
ヒント　電圧の代わりに電流の式を用いよ。

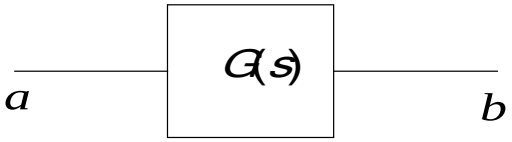
演習 **5.4.3**　例題の回路について、インダクタに流れる電流のインパルス応答をラプラス変換を用いて求めよ。インパルス応答のフーリエ変換が伝達関数になっていることを確認せよ。
ヒント　入力関数をδ関数にするとインパルス応答が得られる。

ラプラス変換は電気回路以外にも使われる。例えば、自動制御の分野では次のようなブロック線図とともに用いられる。

ブロック線図は“自動制御系の中での信号伝達のありさまを表す線図で、電気工学において用いられている回路図に相当するもの”と言われる。

ブロック線図は回路図とは異なって、実際の回路の記号的表現ではない。着目している回路の中をどのように信号（制御信号）が伝達するかを表現するものである。

最も簡単なブロック線図を以下に示す。たった一つの伝達要素からなり、入力信号 a が出力信号 b にどのように伝達されるかを示している。この例では、信号 a,b のラプラス変換をそれぞれ $A,\ B$ として、$B(s)=G(s)A(s)$　であることを表す。



演習 **5.4.1**　次にスイッチは元々閉じていて、t=0 で開いた場合のインダクタに流れる電流値、インダクタ両端に発生する電圧を求めよ。