

5. 2 ラプラス変換の性質

ラプラス変換、ラプラス逆変換の演算を表すのに次の記号を用いる。

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) \qquad \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$$

ラプラス変換には以下の性質がある。

$$(1) \quad \mathcal{L}[\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)] = \alpha \mathcal{L}[f_1(t)] + \beta \mathcal{L}[f_2(t)]$$

$$(2) \quad \mathcal{L}[f(t - \tau)] = \exp(-\tau s) \mathcal{L}[f(t)] \quad (\tau > 0)$$

ただし関数 $f(t - \tau)$ は $t \geq \tau$ で値をもち、 $t < \tau$ では 0 である。

$$(3) \quad \mathcal{L}[\exp(-at)f(t)] = F(s + a) \qquad \text{ただし変換が存在するとき}$$

$$(4) \quad \mathcal{L}[f(At)] = \frac{1}{A} F\left(\frac{s}{A}\right) \quad (A > 0)$$

$$(5) \quad \mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0)$$

$$\mathcal{L}[f''(t)] = s^2 F(s) - \{sf(0) + f'(0)\}$$

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - \{s^{n-1}f(0) + s^{n-2}f'(0) + \cdots + sf^{(n-2)}(0) + f^{(n-1)}(0)\}$$

ただし、 $\lim_{t \rightarrow \infty} f^{(i)}(t) \exp(-st) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$ であるとき

この性質を証明するには、部分積分を用いる。すなわち、

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f'(t)] &= \int_0^\infty f'(t) \exp(-st) dt \\ &= [f(t) \exp(-st)]_0^\infty + s \int_0^\infty f(t) \exp(-st) dt = sF(s) - f(0) \end{aligned}$$

$$(6) \quad \mathcal{L}[f * g] = F(s)G(s)$$

ここでラプラス変換における畳み込み関数は次で定義される。

$$f_1 * f_2 = f(x) = \int_0^x f_1(y) f_2(x - y) dy$$

演習 5.2.1 上の(1)から(6)の性質を証明せよ。

5. 3 ラプラス変換による微分方程式解法

定数係数線形微分方程式

$$\frac{d^n}{dt^n}y(t) + a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y(t) + \cdots + a_1\frac{d}{dt}y(t) + a_0y(t) = f(t)$$

の解をラプラス変換を用いて解いてみよう。 $\mathcal{L}[y(t)] = Y(s)$ 、 $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ とする。

両辺をラプラス変換し、**5.2** で述べた性質を用いると次が得られる。

$$\begin{aligned} s^n Y(s) - \{y(0)s^{n-1} + y'(0)s^{n-2} + \cdots + y^{(n-1)}(0)\} \\ + a_{n-1} \left[s^{n-1} Y(s) - \{y(0)s^{n-2} + y'(0)s^{n-3} + \cdots + y^{(n-2)}(0)\} \right] \\ + \cdots + a_1 [sY(s) - y(0)] + a_0 Y(s) = F(s) \end{aligned}$$

これを整理すると次になる。

$$\begin{aligned} \{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0\}Y(s) \\ = F(s) + \{s^{n-1} + a_{n-1}s^{n-2} + \cdots + a_1\}y(0) + \{s^{n-2} + a_{n-1}s^{n-3} + \cdots + a_2\}y'(0) + \cdots + y^{(n-1)}(0) \end{aligned}$$

ここで $A(s) \equiv s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0$ とおくと

$$Y(s) = \frac{F(s)}{A(s)} + \frac{s^{n-1} + a_{n-1}s^{n-2} + \cdots + a_1}{A(s)}y(0) + \frac{s^{n-2} + a_{n-1}s^{n-3} + \cdots + a_2}{A(s)}y'(0) + \cdots + \frac{1}{A(s)}y^{(n-1)}(0)$$

$y(t)$ を求めるには、さらに作業を続けなければならない。この作業を説明するために、例題としてつぎの微分方程式をラプラス変換を用いて解くことにする。

例題： $\frac{d^2y}{dt^2} - 5\frac{dy}{dt} + 4y = 12 + 9\exp(t) + 5\sin 2t$	初期条件： $t=0$ で $y = 1$ $\frac{dy}{dt} = -2$
--	--

求める関数 $y(t)$ のラプラス変換を $Y(s)$ と表す。両辺のラプラス変換を求め、それらを等しいとおく。左辺については、まず前節で述べたラプラス変換の性質（１）と（５）を用いて次のようになる。

$$(s^2Y - (sy(0) + y'(0))) - 5(sY - y(0)) + 4Y$$

$$\text{初期条件を代入して} \quad (s^2Y - (s - 2)) - 5(sY - 1) + 4Y = (s^2 - 5s + 4)Y - s + 7$$

右辺については、積分計算しないで、ラプラス変換表を参照する（ラプラス変換表は重要。ただしよく使う変換は覚えていることが多いが）。定数は単位ステップ関数である。

$$\frac{12}{s} + \frac{9}{s-1} + \frac{5 \cdot 2}{s^2 + 4}$$

左辺と右辺とで等式を作る。

$$(s^2 - 5s + 4)Y - s + 7 = \frac{12}{s} + \frac{9}{s-1} + \frac{5 \cdot 2}{s^2 + 4}$$

$Y(s)$ について解く。

$$Y(s) = \frac{s - 7 + \frac{12}{s} + \frac{9}{s-1} + \frac{5 \cdot 2}{s^2 + 4}}{s^2 - 5s + 4}$$

これで解のラプラス変換が得られた。これを逆変換すれば解が得られる。そこで逆変換を積分計算・・・ではなくて、またラプラス変換表を参照する。この変換表参照で済ませるところがラプラス変換を用いて解く方法の利点である。しかしこのままでは表参照できない。部分分数展開して、表に載っている比較的簡単な分数式の和として表す必要がある。その作業は以下のように行う。

まず分母を因数分解する。そのためには根を求めればよい。この例では簡単に因数分解できて $s^2 - 5s + 4 = (s-4)(s-1)$ となる。そこで次のように展開される。

$$Y(s) = \frac{s}{(s-4)(s-1)} - \frac{7}{(s-4)(s-1)} + \frac{12}{s(s-4)(s-1)} + \frac{9}{(s-4)(s-1)^2} + \frac{10}{(s^2 + 4)(s-4)(s-1)}$$

これをさらに部分分数展開する。まず重根を含まない場合から始める。

$$(X(s) =) \frac{s}{(s-4)(s-1)} = \frac{a_1}{s-4} + \frac{a_2}{s-1} \text{ とおき、 } a_1, a_2 \text{ を求める。そのために両辺に } (s-4) \text{ をか}$$

けて、 $s=4$ とすると、左辺は a_1 となり、右辺は $4/3$ となる。したがって $a_1=4/3$ と求まる。一方、両辺に $(s-1)$ をかけて $s=1$ として、 $a_2=-1/3$ となる。

この手法を一般化すると以下になる。

重根がない場合の部分分数展開法： $X(s)$ の分母が $\prod_{i=1}^m (s-s_i)$ と因数分解されているとき、

$$X(s) = \sum_{i=1}^m \frac{a_i}{s-s_i} \text{ と展開したときの係数は } a_i = (s-s_i) X(s) \Big|_{s=s_i} \text{ で求めることができる。}$$

次に重根が含まれる場合の部分分数展開は次のように行う。

$$(X(s) =) \frac{9}{(s-4)(s-1)^2} = \left(\frac{a_{1,1}}{s-1} + \frac{a_{1,2}}{(s-1)^2} \right) + \frac{a_2}{s-4} \text{ の両辺に } (s-1)^2 \text{ をかけると、}$$

$$(s-1)^2 X(s) = (a_{1,1}(s-1) + a_{1,2}) + (s-1)^2 \frac{a_2}{s-4} \quad (1)$$

そこで両辺に $s=1$ を代入すると、 $a_{1,2} = (s-1)^2 X(s) \Big|_{s=1} = \frac{9}{1-4} = -3$ となる。次に式 (1)

を s で微分すると $\frac{d}{ds}((s-1)^2 X(s)) = a_{1,1} + 2(s-1)\frac{a_2}{s-4} - (s-1)^2 \frac{a_2}{(s-4)^2}$ となるから、

ここで $s=1$ を代入すると $a_{1,1} = \frac{d}{ds}((s-1)^2 X(s)) \Big|_{s=1} = \frac{d}{ds} \frac{9}{s-4} \Big|_{s=1} = -\frac{9}{(s-4)^2} \Big|_{s=1} = -1$

と求めることができる。この手法を一般化すると以下になる。

重根を含む場合の部分分数展開法： $X(s)$ の分母が $\prod_{i=1}^m (s-s_i)^{l_i}$ と因数分解されているとき、

$X(s) = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^{l_i} \frac{a_{i,j}}{(s-s_i)^j} \right)$ と部分分数展開したときの係数は、

$a_{i,j} = \frac{1}{(l_i-j)!} \frac{d^{l_i-j}}{ds^{l_i-j}} \left((s-s_i)^{l_i} X(s) \right) \Big|_{s=s_i}$ で求めることができる。

以上の作業の結果、我々の式は次のように部分分数展開される。

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{-1}{s-4} + \frac{2}{s-1} + \frac{3}{s} + \frac{1}{(s-4)} + \frac{-4}{(s-1)} + \frac{1}{(s-4)} + \frac{-1}{(s-1)} + \frac{-3}{(s-1)^2} \\ &+ \frac{1}{(s+2i)-4i} \frac{10}{(-2i-4)(-2i-1)} + \frac{1}{(s-2i)-4i} \frac{10}{(2i-4)(2i-1)} + \frac{1}{6} \frac{1}{(s-4)} - \frac{2}{3} \frac{1}{(s-1)} \\ &= \frac{7}{6} \frac{1}{(s-4)} - \frac{11}{3} \frac{1}{(s-1)} - \frac{3}{(s-1)^2} + \frac{3}{s} + \frac{1}{2} \frac{s}{s^2+4} \end{aligned}$$

各項は変換表を参照して時間関数に変換できる。

$$y(t) = \frac{7}{6} \exp(4t) - \frac{11}{3} \exp(t) - 3t \exp(t) + 3 + \frac{1}{2} \cos 2t$$

ラプラス変換による解法の特徴は、微分方程式が代数方程式のような演算で解けることと、初期条件を取り込んで解が得られることである。フーリエ変換ではこれはできなかった。それは積分範囲の下限が $-\infty$ であったからである。 $-\infty$ で関数が有限値をもつとすると積分は ∞ になり、フーリエ変換が得られない。 $-\infty$ で関数値が零ならば初期値を取り込みようがない。ところが、ラプラス変換は積分範囲の下限が 0 である。その点での値すなわち初期値を取り込むことができる。

演習 5.3.1 次の微分方程式をラプラス変換を用いて解け。

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 4 \frac{dy}{dt} + 5y = \delta(t-1) \quad t > 0 \quad \text{初期条件 : } t=0 \quad y = \frac{4}{5} \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{12}{5}$$