5　ラプラス変換

フーリエ変換では$-\infty < t < \infty$で定義された関数$f(t)$に$\exp\left(-j\omega t\right)$をかけ、$-\infty < t < \infty$で積分して$F\left(j\omega\right)$を得た。しかし$f(t)$の$t \to \pm\infty$での振る舞いが悪くて積分が収束せず、$F\left(j\omega\right)$が定義できない場合がある。これに対して、区間$0 \le t < \infty$のみを考え、$\exp\left(-j\omega t\right)$の代わりに$\exp\left(-\left(\sigma + j\omega\right)t\right)$をかけて$0 \le t < \infty$で積分するのがラプラス変換である。ここで$\sigma$は積分が収束するような値とする。こうして変換された関数をラプラス変換とよぶ。フーリエ変換からラプラス変換に移ることにより変換できる関数の範囲が広がる。

フーリエ級数あるいはフーリエ変換から元の関数が再現されたように、ラプラス変換から元の関数が再現される。ここではこれらについて述べ、さらに理工学上の応用を述べる。

微分方程式の解を t =0 での初期条件だけ与えて t >0 の範囲で求めるのに、ラプラス変換が便利に使える。ラプラスは 1812 年にこの変換を微分方程式の解法に応用した。これはフーリエ級数、フーリエ変換が用いられるより前の出来事だ。

5．1　$[\mathbf{0},\infty)$上の関数とラプラス変換

$0 \le t < \infty$で定義された関数$f(t)$が$t \to \infty$で発散し、フーリエ積分$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp\left(-j\omega t\right)dt$が計算できないとする。これに対して、$-\infty < t < 0$で$f(t) = 0$として関数の定義域を変更し、この$f(t)$に減衰関数$\exp(-\sigma t)$をかけて$\infty$での発散を抑えた関数$g(t) = \exp\left(-\sigma t\right)f(t)$をつくり、これをフーリエ変換する。

$$G(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\exp(-\sigma t)f(t)\right)\exp\left(-j\omega t\right)dt = \int_{0}^{\infty} \left(\exp\left(-\sigma t\right)f(t)\right)\exp\left(-j\omega t\right)dt$$

は積分でき、$g(t)$のフーリエ変換$G(j\omega)$を求めることができる。そしてフーリエ逆変換

$g(t) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} G\left(j\omega\right)\exp\left(j\omega t\right)d\omega$　により$g(t)$が再現でき、

$$f(t) = \exp\left(\sigma t\right)g(t) = \frac{1}{2\pi}\exp\left(\sigma t\right)\int_{-\infty}^{\infty} G\left(j\omega\right)\exp\left(j\omega t\right)d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G\left(j\omega\right)\exp\left(\left(\sigma + j\omega\right)t\right)d\omega$$

として$f(t)$も再現できる。単なるフーリエ変換・逆変換だけではできなかったことが可能になった。この方法が採れたのは、$f(t)$の自由に定義できる定義域を$0 \le t < \infty$に制限したからである（もし$-\infty < t < 0$で自由な関数定義を許したら、$-\infty$で$f(t)\exp(-\sigma t)$が発散する場合があり、一般にはこの方法が使えなくなる）。

以上の結果をまとめると次のように表現できる。

$$G(j\omega) = \int_{0}^{\infty} f(t)\exp\left(-\left(\sigma + j\omega\right)t\right)dt \qquad f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G\left(j\omega\right)\exp\left(\left(\sigma + j\omega\right)t\right)d\omega$$

ここで記法を改めて$s = \sigma + j\omega$とおいて

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \exp(-st)\, dt \qquad \text{ラプラス変換}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(s) \exp\big((\sigma + j\omega) t\big)\, d\omega$$

が成り立つことは明らかである。その根拠はフーリエ変換の存在に帰着される。
ラプラス逆変換は上の通りだが、$ds = jd\omega$であることに注意し、記法として

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} F(s) \exp(st)\, ds \qquad \text{ラプラス逆変換}$$

と表す。典型的な関数についてはラプラス変換が得られており、表にされている。
以上がラプラス変換とラプラス逆変換の定義である。

以下に補足事項を述べる。ラプラス変換で用いられるσの値は、積分が十分に速く収束するように、一つ決めて固定しておく。ラプラス変換を応用する際、最終結果はσの決め方によらない。

σの値については、ある臨界値σ_cがあって、$\sigma > \sigma_c$（収束域）では*F*(*s*)が存在し、$\sigma < \sigma_c$では存在しない場合がある。例えば、

$t \to \infty$で$f(t) \to \exp(\alpha t)$　ならば　$\sigma_c = \alpha$
$t \to \infty$で$f(t) \to t^n$　ならば　$\sigma_c = 0$　である。

ラプラス変換が存在しないような関数もある。例えば、

$t \to \infty$で$f(t) \to \exp\left(t^2\right)$　となるような関数にはラプラス変換は存在しない。

ラプラス変換の定義における積分範囲は[0,∞]であった。*t*=0 で不連続な関数を扱う場合がある（δ関数δ(*t*)はその一例である）。その場合には定義における積分範囲を[−ε,∞]あるいは[ε,∞]にして、ε→0（ε>0）とするように定義し直す。定義と矛盾しないラプラス変換、逆変換を行えばよい。以下の演習で採り上げるδ関数のラプラス変換では、定義を次とすればよい。

$$F(s) = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{-\varepsilon}^{\infty} f(t) \exp(-st)\, dt$$

演習 5.1.1　単位階段関数のラプラス変換を求めよ。

$$Y(t) = 1 \quad (t \geq 0)$$

演習 5.1.2　単一パルスのラプラス変換を求めよ。

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (t > 2a) \\ E & (0 \leq t \leq 2a) \end{cases}$$

演習 5.1.3　減衰パルスのラプラス変換を求めよ。

$$f(t) = \exp(-\alpha t) \quad (0 \leq t)$$

演習 5.1.4　δ 関数のラプラス変換を求めよ。

演習 5.1.5　正弦波関数のラプラス変換を求めよ。

$$f(t) = E \sin \omega_0 t \quad (0 \leq t)$$

ラプラス変換表

$f(t)$	$\Leftrightarrow$	$F(s)$	
$\delta(t)$		1	
$Y(t)$ *step function*		$\frac{1}{s}$	
t		$\frac{1}{s^2}$	
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$		$\frac{1}{s^n}$	$(n = 1, 2, \cdots)$
$\exp(at)$		$\frac{1}{s-a}$	$\mathrm{Re}[s] > a$
$t \exp(at)$		$\frac{1}{(s-a)^2}$	$\mathrm{Re}[s] > a$
$\frac{t^{n-1}\exp(at)}{(n-1)!}$		$\frac{1}{(s-a)^n}$	$\mathrm{Re}[s] > a$

$f(t)$	$\Leftrightarrow$	$F(s)$
$\cos \omega t$		$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sin \omega t$		$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cosh \alpha t$		$\frac{s}{s^2-\alpha^2}$
$\sinh \alpha t$		$\frac{\alpha}{s^2-\alpha^2}$
$\exp(-\alpha t)\cos \omega t$		$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$
$\exp(-\alpha t)\sin \omega t$		$\frac{\omega}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$