

4 離散フーリエ変換

アナログ信号をデジタル信号処理するには、連続的な信号を一定時間間隔でサンプリングする必要がある。シャノンの標本化定理（3.4）によれば、有限周波数帯域をもつ連続信号を適切なサンプリングによって離散化しても、信号のすべての情報を保持できる。

ここでは周期的関数をサンプリングにより離散化した関数のフーリエ級数展開について述べる。結論だけ求めるならばいきなり 4.2 に跳んで構わない。

4.1 周期関数のサンプリング値から求めたフーリエ係数

連続的で周期的な関数 $f(t)$ からサンプリングして得た離散周期関数 $f_s(t)$ を次のように定義する。サンプリング間隔を T_s 、元の関数 $f(t)$ の周期 T は NT_s に等しいとする。 N は整数である。

$$f_s(t) = T_s \sum_{n=0}^{N-1} f(t) \delta(t - nT_s) \quad -\varepsilon < t \leq NT_s - \varepsilon \quad \varepsilon > 0$$

$$f_s(t + nT) = f_s(t) \quad n \text{ は整数}$$

一周期の設定にあたって δ 関数が境界にかからないように微少量 ε だけずらした。 $f_s(t)$ は周期関数であるから次のようにフーリエ級数展開して表すことができる。

$$f_s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp\left(ik \frac{2\pi}{T} t\right)$$

フーリエ係数 c_k は次となる。

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T} \int_{-\varepsilon}^{NT_s - \varepsilon} f_s(t) \exp\left(-jk \frac{2\pi}{T} t\right) dt = \frac{1}{NT_s} \int_{-\varepsilon}^{NT_s - \varepsilon} \left(T_s \sum_{n=0}^{N-1} f(t) \delta(t - nT_s) \right) \exp\left(-jk \frac{2\pi}{NT_s} t\right) dt \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \int_{-\varepsilon}^{NT_s - \varepsilon} \left(f(t) \exp\left(-jk \frac{2\pi}{NT_s} t\right) \right) \delta(t - nT_s) dt = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(nT_s) \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} kn\right) \end{aligned}$$

以下に示すように、このフーリエ係数は周期 N の周期性をもつ。

$$c_{k+N} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(nT_s) \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} (k+N)n\right) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(nT_s) \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} kn\right) = c_k$$

すなわち、離散周期関数は離散周期スペクトルをもつ。

さて、離散スペクトル 1 周期分について和を次のようにとってみる ($f_s(t)$ を求めようとしていないところに注意)。

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{N-1} c_k \exp\left(jk \frac{2\pi}{T} n T_s\right) &= \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} f(m T_s) \exp\left(-jk \frac{2\pi}{N} m\right) \right) \exp\left(jk \frac{2\pi}{N T_s} n T_s\right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} f(m T_s) \left(\sum_{k=0}^{N-1} \exp\left(jk \frac{2\pi}{N} (n - m)\right) \right) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} f(m T_s) N \delta_{nm} = f(n T_s)\end{aligned}$$

ここで次を用いた。

$$\sum_{k=0}^{N-1} \exp\left(jk \frac{2\pi}{N} (n - m)\right) = \begin{cases} N & n = m \\ \frac{1 - \exp\left(jN \frac{2\pi}{N} (n - m)\right)}{1 - \exp\left(j \frac{2\pi}{N} (n - m)\right)} = 0 & n \neq m \end{cases}$$

結局、次の関係が導かれた（これを天下りの的に与え、成り立つことを確認してもよかった）。

$$f(n T_s) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{m=0}^{N-1} f(m T_s) \exp\left(-jk \frac{2\pi}{N} m\right) \right) \exp\left(jn \frac{2\pi}{N} k\right)$$

ここで改めて $f_n = f(n T_s)$ とし、

$$\begin{aligned}F_k &= \sum_{n=0}^{N-1} f_n \exp\left(-jk \frac{2\pi}{N} n\right) \quad \text{を離散フーリエ変換、そして} \\ f_n &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F_k \exp\left(jn \frac{2\pi}{N} k\right) \quad \text{を離散フーリエ逆変換と呼ぶ。}\end{aligned}$$

4. 2 離散フーリエ変換

単位円を N 分割した点に相当する複素変数 W を次で定義する。

$$W = \exp\left(-j \frac{2\pi}{N}\right)$$

このとき、**4.1** に述べたことから、離散フーリエ変換、逆変換は、それぞれ

$$F_k = \sum_{n=0}^{N-1} f_n W^{kn} \quad f_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F_k W^{-nk}$$

と表される。

離散信号値、離散スペクトル値、どちらも N 個のデータからなる。このままデジタル処理できる形のフーリエ級数展開である。

さらに対称性を用いると演算量を減らして高速に変換演算できる。それが 1965 年に Cooley と Tukey とにより発表された高速フーリエ変換法（FFT）である。

フーリエ変換の演習問題

フーリエ変換についての話は本日でおしまい。そこで改めてフーリエ変換について考えてみよう。
この考えてみるのが演習（計算だけが演習ではない）

1 スペクトルとは何？

光のスペクトル／太陽光をプリズムに通すと色に分かれる／あの色の分布（直感的）／光は電磁波、時間的に振動、振動周波数に対する振動振幅の分布が色の分布／この分布を求める数学的方法はフーリエ変換／時間波形のフーリエ変換／拡張して関数のフーリエ変換が、その関数のスペクトル

2 スペクトルを用いると何ができる？

光の例をとるならば色が判別できる（これは目の方が早い。色フィルタも使える）／ある関数について ” 色 ”（これは比喻）を判定できる（関数の同定）／他に関数の補正、など様々な処理が可能

3 処理とは何？

回路は電気信号に ” 処理 ” を施す／その処理は入力に対する出力応答で定義できる／回路に信号が入力されたとき出力を得る方法を考えると／回路の伝達関数 $K(j\omega)$ を求めておく（回路が与えられたら決まる（線形回路理論））／次に入力信号のスペクトル $F_{in}(j\omega)$ を求める。これがフーリエ変換／出力信号のスペクトルは $F_{out}(j\omega) = K(j\omega) F_{in}(j\omega)$ ／出力信号はこれのフーリエ逆変換で得られる

4 では実際にスペクトルを求めるには

光の場合、周波数が高すぎる、アナログ的方法しかない、プリズム、分光器／電気信号では、今はデジタル技術が使われる／ではどうするのか／信号は非周期的としよう／しかし無限時間を扱うことはできない／有限時間 T でカット（カットするとき、有限の振幅をいきなり切ると問題が生じるので要注意）／カットしたら周期 T の周期信号とみなしても構わない／（周期信号の一周期分だけに注目すればよい。それ以外の部分は無視すればよい）／周期信号になった／デジタル技術を用いるには連続信号をそのままは扱えない／そこでサンプリングする／サンプリングの周期 T_s はどうきめたらよいか／信号のスペクトルが分かっているときは最大周波数 f_{max} を f_c として $T_s = 1/(2f_c)$ ／もしスペクトルが分からない、または、だらだらと尾を引いている場合は？／最大周波数をこちらで決める／ok それだけで大丈夫／ダメ！／入力信号から f_c 以上のスペクトル成分をあらかじめ除去しなければ悪影響がでる（これはエイリアシング誤差と呼ばれる。詳細は略）／そこで f_c 以上のスペクトル成分を除去するローパスフィルタに信号を通過させる／そしてサンプリング／具体的にはどうする／アナログ電圧の瞬時値をホールドする（サンプルホールド回路）／ホールドされている電圧をデジタル値に変換する（アナログデジタル変換器）／ここで連続な電圧を量子化してデジタル値にする（量子化誤差が入る）／（フルスケール値を 2^m に分割し何番目の範囲に入るか判定。 m はビット数）／このようにして f_n の値が取得される／あとは離散フーリエ変換（DFT）によって離散スペクトルが求められる／これで現実の信号のスペクトルをデジタル的に取得することができる／周期的離散的信号（有限時間）を周期的離散的スペクトル（有限幅）に変換
連続無限の信号を、どのように、扱うかについて、アイディアが得られましたか