３．４　シャノンの標本化定理

”周波数帯域幅が f_c に制限されている時間関数をサンプリングして離散的信号を得るのに、**$2f_c$** 以上の周波数でサンプリングすれば、この離散的信号から元の時間関数を再現できる”。これはシャノンの標本化定理と呼ばれる。

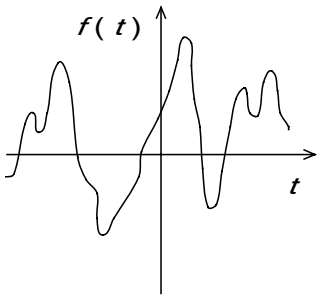
周波数帯域幅が f_c に制限されている関数 $f(t)$ とは、フーリエ変換すなわちスペクトル関数 $F(j\omega)$ が領域 $-\omega_c \le \omega < \omega_c$（$\omega_c = 2\pi f_c$）の外では零である関数である（図参照）。

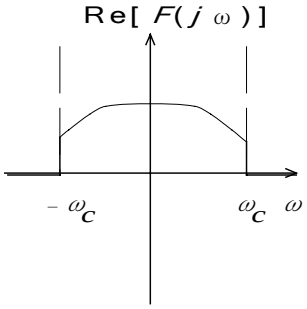
ここで思いだそう。時間軸上の有限区間で定義された時間関数 $f(t)$ を周期的に拡張して $-\infty < t < \infty$ で定義すると、これに対応するスペクトル $F(j\omega)$ は離散的になった（**1.1**）。そして時間関数と周波数スペクトルとの間には双対性があった（**3.2**）。ならば・・・

周波数軸上の有限区間 $-\omega_c \le \omega < \omega_c$ の外側は零であるスペクトル密度関数 $F(j\omega)$ を周期的に拡張して $-\infty < \omega < \infty$ で定義すると、これに対応する時間関数は離散的な時刻でのみ値をもつ。標本化定理が言っていることに近づいてきた。もう少し詳しく調べよう。

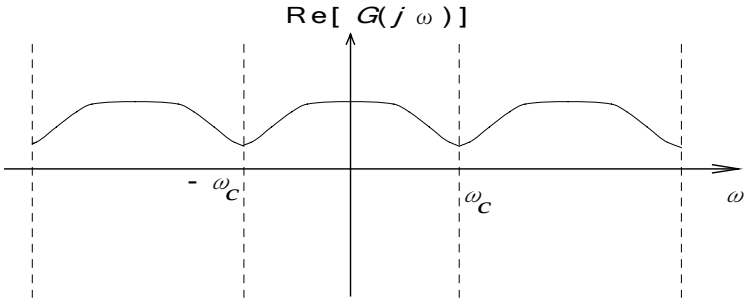
$f(t)$ のスペクトル密度 $F(j\omega)$ が　$F(j\omega) = 0 \quad |\omega| \ge \omega_c$　であるならば（図）、

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)\exp(j\omega t)\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} F(j\omega)\exp(j\omega t)\,d\omega \quad \text{である。}$$





区間 $-\omega_c \le \omega < \omega_c$ の $F(j\omega)$ を周期的に繰り返してスペクトル密度 $G(j\omega)$ を $-\infty < \omega < \infty$ で定義する（図）。すなわち　$G(j\omega + j2n\omega_c) = F(j\omega) \qquad -\omega_c \le \omega < \omega_c$



$G(j\omega)$ は周期関数であるからフーリエ級数で表すことができる。

$$G(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(jn\frac{\pi}{\omega_c}\omega\right) \qquad (1)$$

展開係数は、周期が $2\omega_c$ であることに注意すると、次で与えられる。

$$c_n = \frac{1}{2\omega_c}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} G(j\omega)\exp\left(-jn\frac{\pi}{\omega_c}\omega\right)d\omega = \frac{1}{2\omega_c}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} F(j\omega)\exp\left(-jn\frac{\pi}{\omega_c}\omega\right)d\omega = \frac{\pi}{\omega_c}f\left(-\frac{n\pi}{\omega_c}\right) \quad (2)$$

さて式(2)は、離散時刻 $t_{-n} = -\dfrac{n\pi}{\omega_c}$ における $f(t)$ の値だけで（離散時刻の間の連続的な時刻での値は使わずに）スペクトル密度 $G(j\omega)$ が決まる、と言っている。これはさらに次のことを意味する。$G(j\omega)$ から区間 $-\omega_c \le \omega < \omega_c$ だけを取り出し、それ以外で 0 として $F(j\omega)$ を求めることができ、それをフーリエ逆変換して $f(t)$ が得られる。結局、離散時刻の値を与えただけで、それらの間の連続的な時刻での値も決まる。定理の本質は証明された。

以下では、離散時刻の値だけから、連続的な時刻の値が決まる様子を説明する。まず $G(j\omega)$ に対応する時間関数 $g(t)$ は　$g(t) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} G(j\omega)\exp(j\omega t)d\omega$　で与えられ次となる。

$$g(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\pi}{\omega_c}f\left(-\frac{n\pi}{\omega_c}\right)\exp\left(jn\frac{\pi}{\omega_c}\omega\right)\right)\exp(j\omega t)d\omega$$

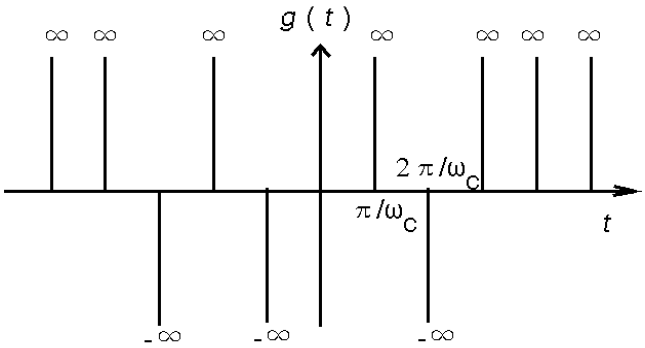
$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\pi}{\omega_c}f\left(-\frac{n\pi}{\omega_c}\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(jn\frac{\pi}{\omega_c}\omega\right)\exp(j\omega t)d\omega\right)$$

（　）内の ω 積分は次のようになる。

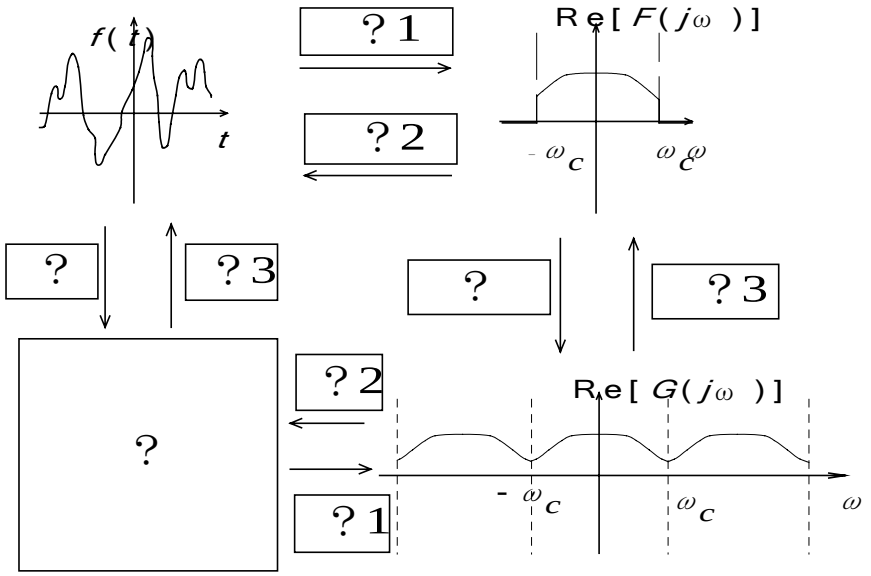
$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(jn\frac{\pi}{\omega_c}\omega\right)\exp(j\omega t)d\omega = \lim_{q\to\infty}2\frac{\sin\left(q\left(n\frac{\pi}{\omega_c}+t\right)\right)}{\left(n\frac{\pi}{\omega_c}+t\right)} = 2\pi\delta\left(n\frac{\pi}{\omega_c}+t\right)$$

よって　$g(t) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\pi}{\omega_c}f\left(-\frac{n\pi}{\omega_c}\right)\delta\left(t+n\frac{\pi}{\omega_c}\right) = \frac{\pi}{\omega_c}\sum_{n=-\infty}^{\infty}f\left(\frac{n\pi}{\omega_c}\right)\delta\left(t-n\frac{\pi}{\omega_c}\right)$

$g(t)$ は δ 関数 $\delta\left(t-\dfrac{n\pi}{\omega_c}\right)$ の和、すなわち時刻 $t_n = \dfrac{n\pi}{\omega_c}$ でのみ非零の値をもつ時間関数である。



演習 3.4.0　以下の図を眺めて、？部分に適切な言葉、式あるいは図を入れながら、この図の集まりが意味することを考えよ。標本化定理の理解を助けるために。



スペクトル密度$G(j\omega)$に次の窓関数$W(j\omega)$をかけると、スペクトル密度$F(j\omega)$を得る。

すなわち　$F(j\omega)=G(j\omega)W(j\omega)$　　ただし　$W(j\omega)=\begin{cases}1 & |\omega|\le\omega_c\\ 0 & |\omega|>\omega_c\end{cases}$

スペクトル密度が二つの関数の積になるならば時間波形は対応する時間波形の畳み込み関数になる。この性質を用いると $f(t)$の表現式　$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}g(\tau)w(t-\tau)d\tau$　が得られる。ここに$w(t)$は$W(j\omega)$のフーリエ逆変換で次で与えられる。

$$w(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}W(j\omega)\exp(j\omega t)d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}\exp(j\omega t)d\omega=\frac{1}{\pi}\frac{\sin(\omega_c t)}{t}$$

これと、上で求めた $g(t)$を代入すると、

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\pi}{\omega_c}\sum_{n=-\infty}^{\infty}f\left(\frac{n\pi}{\omega_c}\right)\delta\left(\tau-n\frac{\pi}{\omega_c}\right)\left(\frac{1}{\pi}\frac{\sin(\omega_c(t-\tau))}{t-\tau}\right)d\tau$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f\left(\frac{n\pi}{\omega_c}\right)\frac{\sin\left(\omega_c\left(t-\frac{n\pi}{\omega_c}\right)\right)}{\omega_c\left(t-\frac{n\pi}{\omega_c}\right)}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f\left(\frac{n\pi}{\omega_c}\right)Sa\left(\omega_c\left(t-\frac{n\pi}{\omega_c}\right)\right)\qquad(3)$$

ここに関数$Sa(x)$は、$Sa(x)=\dfrac{\sin x}{x}$　と定義され、標本化関数と呼ばれる。標本化関数は、演習 3.2.1 で調べた（上にも述べた）ように、窓関数のフーリエ変換である。最後の式は

関数のサンプリング点だけを用いた表し方を与えている。

元々の波形 $f(t)$ を表すには、連続値すべてを知る必要はなく、とびとびの時刻でのサンプリング値 $f\left(n\dfrac{\pi}{\omega_c}\right)=f\left(\dfrac{n}{2f_c}\right)$ $(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ のみで十分である。時間波形 $f(t)$ がもつ情報を失わないための、最低のサンプリング周波数は $2f_c$ である。あるいはサンプリング間隔の上限は $\dfrac{1}{2f_c}$ である。

標本化定理の意味するところは大きい。これによって時間的に連続な波形に含まれる情報量を定義することができる。また時間的に連続な波形を離散時刻での値のみ用いてデジタル信号処理することの妥当性の根拠を与える。

数値実験をやってみよう。

$$sa(x) := \frac{\sin(x)}{x}$$

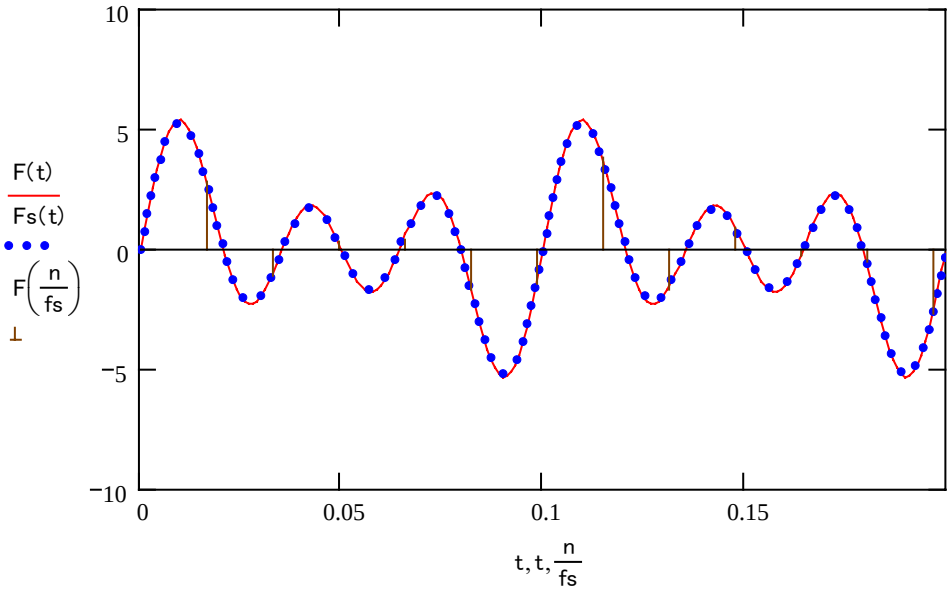
$a1 := 1$ $\quad a2 := 2$ $\quad a3 := 3$ $\quad f1 := 10$ $\quad f2 := 20$ $\quad f3 := 30$

$fs := 61$

$$F(t) := a1\cdot\sin(2\cdot\pi\cdot f1\cdot t) + a2\cdot\sin(2\cdot\pi\cdot f2\cdot t) + a3\cdot\sin(2\cdot\pi\cdot f3\cdot t)$$

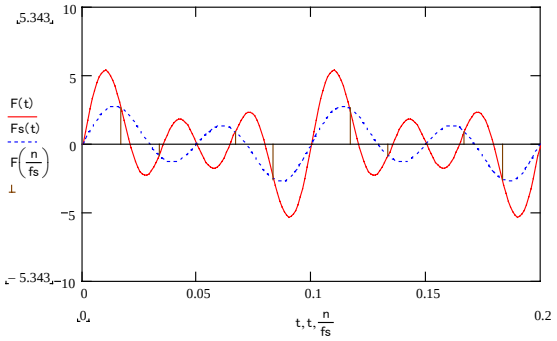
$$Fs(t) := \sum_{n=-100}^{100} F\left(n\cdot\frac{1}{fs}\right)\cdot sa\left[\pi\cdot fs\cdot\left(t-\frac{n}{fs}\right)\right]$$

$t := 0, 0.001 .. 0.2$ $\quad n := 0 .. 100$

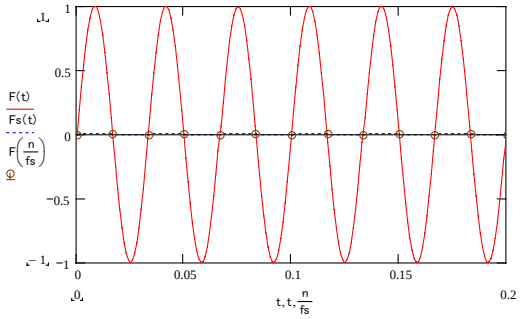


この数値実験では 10,20,30Hz の正弦波を加算した波形を採り上げた。サンプリング周波数を 61Hz にしたところ元の波形を再現できた。しかし周波数の上限値は 30Hz である。

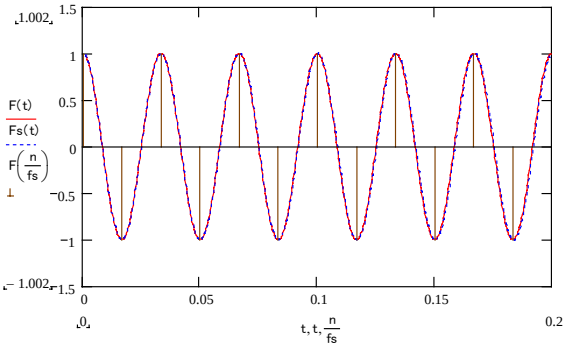
サンプリング周波数はその丁度２倍の 60Hz でよいはずだ。fs=60 としてみると下のようになった。元の波形が再現できない。これはどうしたことだろう。



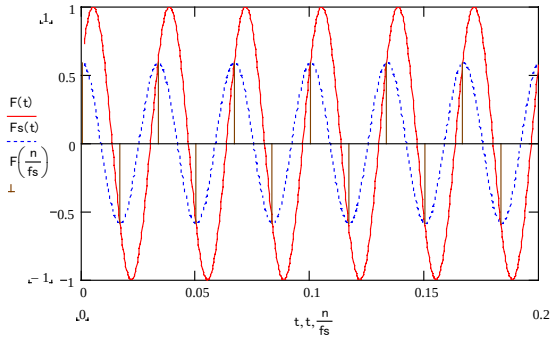
どうやら30Hzの波形が抜けてしまったようだ。そこで30Hzの波形だけでサンプリング、再現実験してみたところ・・・



サンプリング点は丁度零のところばかりである。これでは正しく 30Hz の正弦波を再現できない。一方、サンプリング点の位置をπ/2 だけずらすと、同じサンプリング間隔でも・・・



再現ができる場合がある。一般の位置では・・・



再現できない。このように上限周波数値 f_c に δ 関数的（離散的）にスペクトル成分が存在する場合は、サンプリング周波数は $2f_c$ では不十分で、これよりも大きな値にする必要が

ある。この例は境界線上にスペクトル密度が集中した特別な場合であって連続スペクトル密度の場合とは異なる。

演習 3.4.1　式(3)に標本点 $t = \dfrac{n\pi}{\omega_c}$　$n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ を代入してみよ。標本点で等号が成り立つことを確かめよ。

演習 3.4.2　式(3)によると標本点以外の時刻の関数値は、厳密には、$-\infty < t < \infty$ のすべての標本点の値に依存していることを確かめよ。

演習 3.4.3　標本化関数 Sa の概略を描け。それを用いて $f\left(\dfrac{n}{2f_c}\right)$ を適当に与えて、式(3)をグラフに描け。

演習 3.4.4 この節の最初に述べた”周波数帯域幅が f_c に制限されているアナログ波形をサンプリングして離散的信号を得るのに、$2f_c$ 以上の周波数でサンプリングすれば、この離散的信号から元の波形を再現できる”について、丁度 $2f_c$ の周波数でサンプリングすると再現できることは確かめられた。では $2f_c$ 以上の周波数でサンプリングしたときは本当に再現できるのか、それはどうしてか述べよ。また、$2f_c$ 以下の周波数でサンプリングしたときは再現できないのか、それはどうしてか述べよ。

通信で扱われる時間関数は情報を担った信号である。信号には、連続（アナログ）信号と離散（デジタル）信号、周期信号と非周期信号がある。そしてこれらのスペクトルにも、連続スペクトルと離散スペクトル、周期スペクトルと非周期スペクトルがある。信号とスペクトルの間には、これまでに述べてきたように、以下の関係が存在する。

（１）周期信号　⟷　離散スペクトル　　**1.1** 参照
（２）非周期信号⟷　連続スペクトル　　**2.1** 参照
（３）離散信号　⟷　周期スペクトル　　（１）の双対
（４）連続信号　⟷　非周期スペクトル　（２）の双対

連続周期信号は離散非周期スペクトルをもつ。両者の関係を結ぶのがフーリエ級数展開である。連続非周期信号は連続非周期スペクトルをもつ。両者を結ぶのがフーリエ変換である。離散周期信号は離散周期スペクトルをもつ。両者を結ぶのが **4** に述べる離散フーリエ変換である。

３．５　回路の波形応答と周波数応答

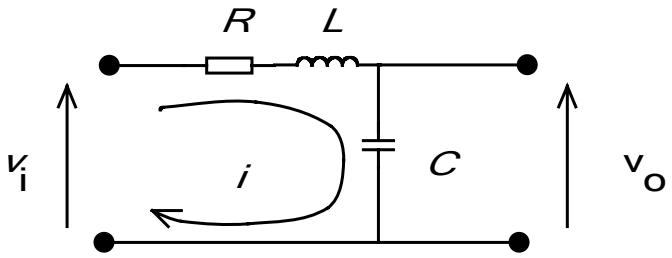
入力信号の周波数スペクトル

1.3 では周期波形の回路応答をフーリエ級数展開を用いて求めた。今度は周期波形ではなくて非周期波形（孤立波形）を入力した場合を調べる。$f(t)$ は **2.1** で述べたようにフーリエ積分で表される。$f(t)$ が実関数の場合には $F(-j\omega)=F^*(j\omega)$ であるからフーリエ積分は次のように 0～∞の範囲だけになる。

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty F^*(j\omega)\exp(-j\omega t)\,d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty F(j\omega)\exp(j\omega t)\,d\omega \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{Re}\left[F(j\omega)\exp(j\omega t)\right]d\omega \end{aligned} \tag{1}$$

ここで $F(j\omega)$ は入力波形のスペクトル密度である。入力波形にどんな周波数成分がどんな割合で含まれるかの周波数分布を示している。

前と同じ平滑回路（下図）を例に用いよう。



角周波数 ω が連続値をとる場合にも、離散値の場合（**1.3**）と同様、$\mathrm{Re}\left[F(j\omega)\exp(j\omega t)\right]$ に対する応答は $\mathrm{Re}\left[K(j\omega)F(j\omega)\exp(j\omega t)\right]$ となる。

出力信号の周波数スペクトル

$K(j\omega)F(j\omega)$ は出力波形のスペクトル密度である。出力波形にどんな周波数成分がどんな割合で含まれるかの周波数分布を示している。

回路の周波数特性

$K(j\omega)$ は回路が高周波を通しやすいのか、低周波を通しやすいのか、など周波数依存性を示しており、周波数特性を表す。$\left|K(j\omega)\right|$ は振幅特性、$\arg\left[K(j\omega)\right]$ は位相特性を示す。

回路の出力波形

出力波形を得るには、$\mathrm{Re}\left[K(j\omega)F(j\omega)\exp(j\omega t)\right]$ をフーリエ逆変換すればよい。

数値計算

上の平滑回路の伝達関数　$K(j\omega)=\dfrac{1}{-\omega^2 LC+j\omega RC+1}$ を用い、単一矩形パルスのスペクトル密度　$F(j\omega)=2Ea\dfrac{\sin\omega a}{\omega a}$　（**演習 2.1.1**）を用いる。これらより、出力波形は

$$v_o(t)=\mathrm{Re}\left[\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{-\omega^2 LC+j\omega RC+1}2Ea\frac{\sin\omega a}{\omega a}\exp(j\omega t)\,d\omega\right]$$

となる。これを次のように規格化する。

$$v_o(t)=\mathrm{Re}\left[\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{-u^2A+juB+1}2E\frac{\sin u}{u}\exp(juY)\,du\right]$$

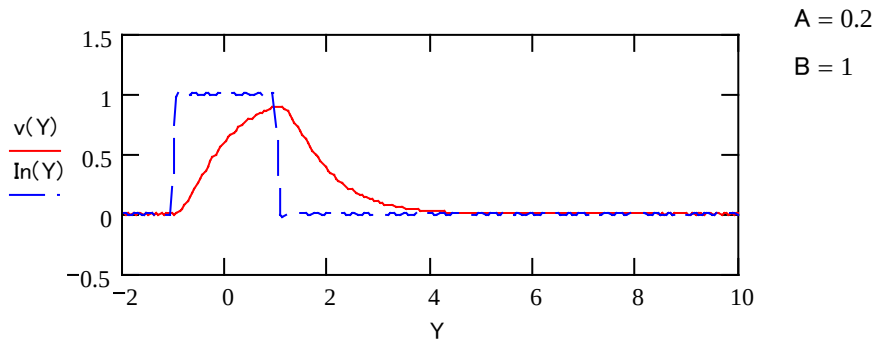
$$A=\frac{LC}{a^2}\quad B=\frac{RC}{a}\quad Y=\frac{t}{a}\quad E=1$$

$A := 0.2$　　$B := 1$　　$M := 100$

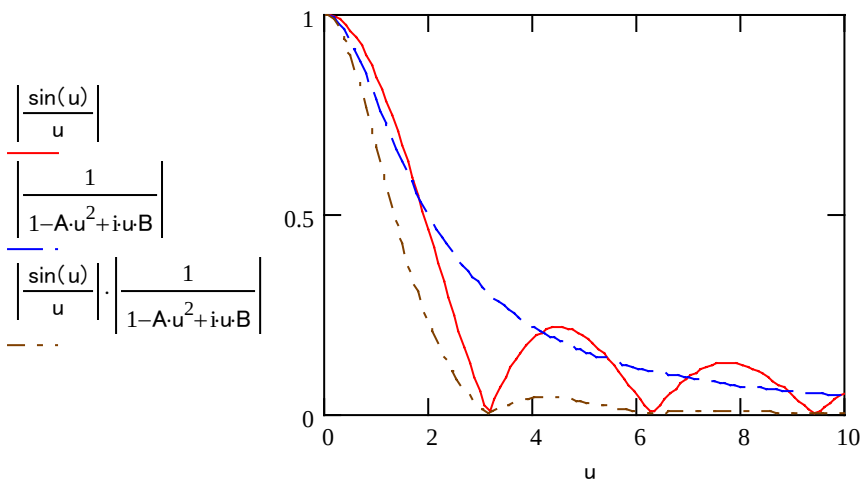
$$v(Y) := \mathrm{Re}\left(\frac{2}{\pi}\cdot\int_0^M \frac{1}{1-A\cdot u^2+i\cdot u\cdot B}\cdot\frac{\sin(u)}{u}\cdot\exp(i\cdot u\cdot Y)\,du\right)$$

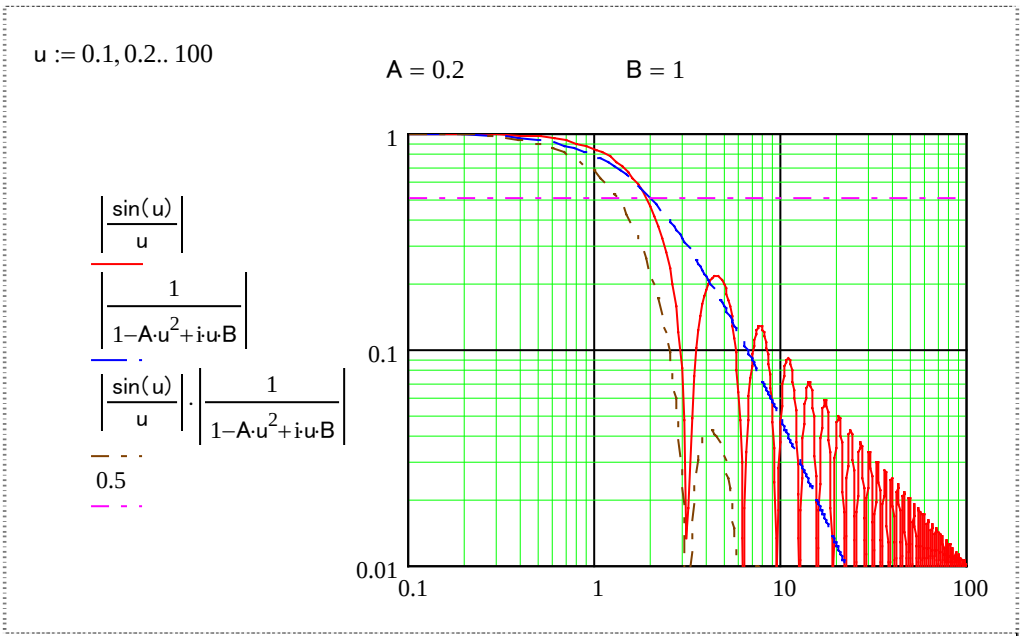
$$In(Y) := \mathrm{Re}\left(\frac{2}{\pi}\cdot\int_0^M \frac{\sin(u)}{u}\cdot\exp(i\cdot u\cdot Y)\,du\right)$$

$Y := -2, -1.95 .. 10$

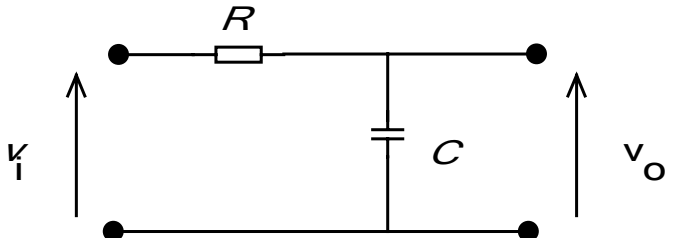
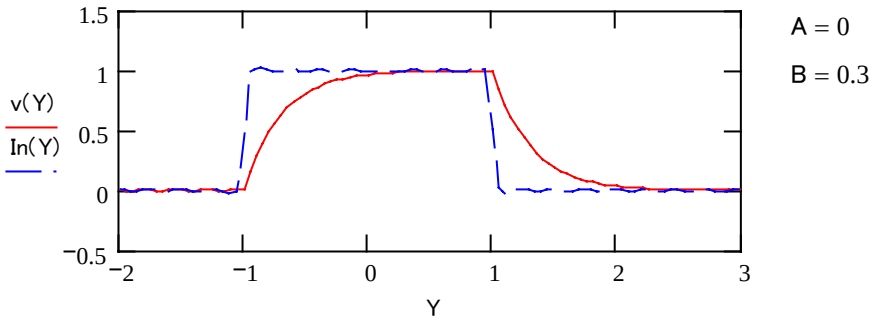


$u := 0.001, 0.1 .. 10$





演習 3.5.1　図の回路の周波数特性、振幅特性、位相特性を求めよ。それぞれをグラフに描け。縦軸、横軸共に対数を用いよ。



演習 3.5.2　上の回路を単一矩形パルスが通過したときの波形を図に示す。
波形がこのように変形した理由を回路の周波数特性を用いて説明せよ。
ヒント：矩形パルスのスペクトル密度分布を考えよ。