３．２　時間波形と周波数スペクトルとの双対性

時間関数$f(t)$をフーリエ変換するとスペクトル密度$F(j\omega)$が得られる。ωにかかるマイナス符号と係数の影響を除いて、スペクトル密度$F(j\omega)$をフーリエ変換すると時間関数$f(t)$が得られる（フーリエ変換および逆変換式を見よ）。このことにより時間領域と周波数領域の間には双対関係が存在する。双対例を挙げよう。

事実１「時間軸上の１点 t_1 で非零の値をもつ関数はδ関数$\delta\left(t-t_1\right)$で、周波数軸上では－∞から∞まで振幅１で振動する関数$\exp\left(-jt_1\omega\right)$である」。

一方、

事実２「周波数軸上の１点ω_1で非零の値をもつ関数はδ関数$\delta\left(\omega-\omega_1\right)$で、時間軸上では－∞から∞まで振幅１で振動する関数$\dfrac{1}{2\pi}\exp\left(j\omega_1 t\right)$である」。

事実１と事実２とは双対の関係にある。

演習 3.2.1　周波数軸上で区間$\left[-\omega_c,\omega_c\right]$でスペクトル密度が一定の$F(j\omega)$をもつ関数の時間軸上での波形を求めよ。次に時間軸上の単一矩形パルスのスペクトル密度（演習 **2.1.1**）と比較せよ。

３．３　パーセバルの等式

$f(t)$ のフーリエ変換を $F(j\omega)$ とするとき、次のパーセバルの等式が成り立つ。

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|F(j\omega)\right|^2 d\omega = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(t)\right|^2 dt$$

証明

2.1 で導いた関係 $f(t)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}F(j\omega)\exp(j\omega t)d\omega$ から次が成り立つ。

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(t)\right|^2 dt = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_{-\infty}^{\infty}F(j\omega)\exp(j\omega t)d\omega\right|^2 dt$$

$$\mathrm{RHS}=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}F(j\omega)\exp(j\omega t)d\omega\int_{-\infty}^{\infty}F^*(j\omega')\exp(-j\omega' t)d\omega' dt$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}F(j\omega)F^*(j\omega')\left(\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(j(\omega-\omega')t\right)dt\right)d\omega' d\omega$$

ところで

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(j(\omega-\omega')t\right)dt=\lim_{g\to\infty}\int_{-g}^{g}\exp\left(j(\omega-\omega')t\right)dt=\lim_{g\to\infty}2\frac{\sin g(\omega-\omega')}{\omega-\omega'}$$

ここで**演習 2.2.1** で導いた $\delta(t)=\lim\limits_{g\to\infty}\dfrac{\sin gt}{\pi t}$ を用いる。

$$\mathrm{RHS}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}F(j\omega)F^*(j\omega')\delta(\omega-\omega')d\omega' d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F^*(j\omega')\left(\int_{-\infty}^{\infty}F(j\omega)\delta(\omega-\omega')d\omega\right)d\omega'=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F^*(j\omega')F(j\omega')d\omega'$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|F(j\omega')\right|^2 d\omega'$$

よって $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(t)\right|^2 dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|F(j\omega')\right|^2 d\omega'$　　証明終わり。

フーリエ級数についても同様にパーセバルの等式が成り立つ。

$$\int_T \left|f(t)\right|^2 dt=\int_T\left|\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\exp\left(jn\omega_0 t\right)\right|^2 dt$$

$$=\int_T\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n{}^*\exp\left(-jn\omega_0 t\right)\right)\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty}c_m\exp\left(jm\omega_0 t\right)\right)dt$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}c_n{}^*c_m\int_T\exp\left(j(m-n)\omega_0 t\right)dt=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}c_n{}^*c_m T\delta_{nm}=T\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|c_n\right|^2$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|c_n\right|^2=\frac{1}{T}\int_T\left|f(t)\right|^2 dt$$