

### 3 時間領域と周波数領域

2で導入したフーリエ変換は、時間領域という”世界”とそれとは別の周波数領域という”世界”の間の行き来を可能にする”手段”である。回路の性質を表現するのに、時間波形を通過させて入力波形と出力波形との関係を記述する仕方がある。これは時間領域での表現法、すなわち時間領域表示である。一方、同じ回路の性質を表すのに、周波数特性を用いる仕方がある。こちらは周波数領域表示ということになる。ここでは、両者について調べ、フーリエ変換が両者を繋いでいることを述べる。

#### 3. 1 時間領域表示と周波数領域表示

関数  $f(t)$  を線形システムに入力したとき出力が  $g(t)$  になるとする。出力  $g(t)$  は入力  $f(t)$  の”関数”である。線形システムとは、ある関数を入力すると別の関数が出力される関数の”関数”である。この”関数”を表現する仕方、すなわちシステムを表現する仕方、について考える。時間的に不変な線形システムを対象にしよう。

”入力  $f(t)$  に対する出力が  $g(t)$  であるならば、任意の時間  $\tau$  に対して、入力  $f(t + \tau)$  に対する出力は  $g(t + \tau)$  である”が成り立つならばこのシステムは時間的に不変（時不変）であるという。

0 で述べたように、”入力  $f_i(t)$  に対する出力が  $g_i(t)$  のとき、任意の定数を  $b_i$  として、

$\sum_i b_i f_i(t)$  に対する出力は  $\sum_i b_i g_i(t)$  である”が成り立つならばこのシステムは線形である。

時間的に不変な線形システムとは、上の時不変性と線形性の両性質をもつシステムである。

まず  $\delta$  関数を用いてシステムを表してみよう。入力  $\delta(t)$  に対する出力を  $k(t)$  とする。 $k(t)$  をインパルスレスポンスと呼ぶ。**2.2** で述べた定義により

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(\tau - t) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$

である。二番目の等式では  $\delta(t)$  が偶関数であることを用いた。この式は、様々な時刻  $\tau$  に生じるインパルスを、それぞれ振幅  $f(\tau)$  で加算した波形は入力波形に等しくなることを示す。時不変性から  $\delta(t - \tau)$  に対する出力は  $k(t - \tau)$  である。積分は連続的な和と見なすことができ、離散的な和について成り立った線形性の性質は、連続的な和である積分についても成り立つから\*

$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$  に対する出力は

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) k(t - \tau) d\tau \quad (1)$$

である。入力  $f(t)$  に対して出力  $g(t)$  がどう決まるかという”関数”の時間領域表示である。これは **2.4** で述べた畳み込み積分である。

\*補足説明：  $\sum_i b_i f_i(t)$  において  $f_i(t) = \delta(t - i\Delta t)$ 、 $b_i = f(i\Delta t) \Delta t$  とすると、

$$f(t) = \sum_i b_i f_i(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f(i\Delta t) \delta(t - i\Delta t) \Delta t \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$

$$g(t) = \sum_i b_i k_i(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f(i\Delta t) k(t - i\Delta t) \Delta t \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) k(t - \tau) d\tau$$

以上をまとめると、時間的に不変な線形システムの入力波形  $g(t)$  は入力波形  $f(t)$  とインパルスレスポンス  $k(t)$  の畳み込み関数となる。線形システムの特性情報はインパルスレスポンス  $k(t)$  にすべて含まれる。 $k(t)$  はシステムの特性を時間領域表示である。

時間領域表示式(1)の両辺をフーリエ変換する。 $g(t)$ 、 $f(t)$ そして $k(t)$ のフーリエ変換、スペクトル密度、をそれぞれ $G(j\omega)$ 、 $F(j\omega)$ そして $K(j\omega)$ とすると、**2.4**で導いたように、

$$G(j\omega) = K(j\omega)F(j\omega) \quad (2)$$

となる。入力  $F(j\omega)$  に対して出力  $G(j\omega)$  がどう決まるかという"関数"の周波数領域表示である。 $K(j\omega)$  はシステムの伝達関数と呼ばれる。このように周波数領域表現では、スペクトル密度を用いて入出力の関係を表現し、入力に伝達関数をかけるだけで出力が得られる。時間領域表示で要求される畳み込みが、周波数領域表示を用いると単なるかけ算になり、簡単になる。ということはシステムの特性が考え易くなる。

フーリエ変換の定義から

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) \exp(j\omega t) d\omega \quad g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(j\omega) F(j\omega) \exp(j\omega t) d\omega$$

である。両式は”  $\exp(j\omega t)$  を入力したときの出力が  $K(j\omega) \exp(j\omega t)$  である”ことを示している。これは **1.3** で回路の応答を求めるときに使った考え方である。

回路や伝送路の伝達関数  $K(j\omega)$  は周波数特性とも呼ばれる。入力と出力との関係を周波数領域表示する重要な概念である。線形システムの特性情報はすべて伝達関数  $K(j\omega)$  に含まれる。上述のように伝達関数  $K(j\omega)$  はインパルスレスポンス  $k(t)$  のフーリエ変換である。

我々は時間軸上の波形について、時間領域で考えることも、周波数領域で考えることもできる。両領域を行き来するのに使われるのがフーリエ変換、逆変換である。

時不変線形システムについて成り立つ関係式をまとめて示す。

| 時間領域表示                                                                                                                                                                                 |                                                                                                                                                                                                 | 周波数領域表示                                                                                   |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\delta(t)$ に対する波形応答 (インパルス応答) $k(t)$<br>$\exp(j\omega t)$ に対する応答 (定常応答) $K(j\omega) \exp(j\omega t)$<br>$f(t)$ に対する波形応答<br>$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) k(t - \tau) d\tau$ |                                                                                                                                                                                                 | $K(j\omega)$ 伝達関数<br><br>$F(j\omega)$ に対するスペクトル応答<br>$G(j\omega) = K(j\omega) F(j\omega)$ |
| 表示間の変換<br>(フーリエ変換<br>逆変換)                                                                                                                                                              | $F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-j\omega t) dt$ $K(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} k(t) \exp(-j\omega t) dt$ $G(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \exp(-j\omega t) dt$ |                                                                                           |