２．２　デルタ関数

δ（デルタ）関数は次の(i)から(iii)の性質をもつ関数として定義される。

(i)　$\delta(x)=\begin{cases}\infty & (x=0)\\ 0 & (x\neq 0)\end{cases}$

(ii)　$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\,dx=1$

(iii) 任意の関数 $f(x)$ に対して $\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\delta(u-x)\,du=f(x)$ となる。

δ 関数は偶関数 $\delta(-t)=\delta(t)$ である。δ 関数のフーリエ変換は次のようになる。

$$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\exp(-j\omega t)\,dt=\exp(-j\omega 0)=1$$

すなわちスペクトルは－∞から∞まで無限に広がり、かつその値はωによらず一定である。

δ 関数は、**演習 2.1.1** で扱った単一矩形パルスの幅 $2a$ と高さ E の積が 1 になるようにして $a\to 0$ にしたものである。なぜならば定義（i）から（iii）を満たすからである。

ところで δ 関数は **1.1.4** で述べたフーリエ級数収束の必要十分条件は満たしていない。これは数学的には超関数と呼ばれる。普通とは異なる関数であるが、とても便利な関数でよく使われる。ディラック(Dirac)のデルタ関数と呼ばれるように、物理学者ディラックによって導入された。

演習 2.2.1　スペクトル $F(j\omega)=1$ を用いてフーリエ逆変換によって

$\delta(t)=\lim_{g\to\infty}\dfrac{\sin gt}{\pi t}$　となることを導け。

２．３　フーリエ変換の存在と性質

フーリエ変換の存在：　$f(x)$ は(－∞,∞)上で定義された関数で、どんな有限区間 $[a,b]$ でも $f(x)$ が積分可能であるとし（$f(t)\exp(-j\omega t)$ も積分可能）、広義積分 $\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}}\int_a^b f(t)\exp(-j\omega t)\,dt$ が**有限値として存在するならばフーリエ変換は存在する。**

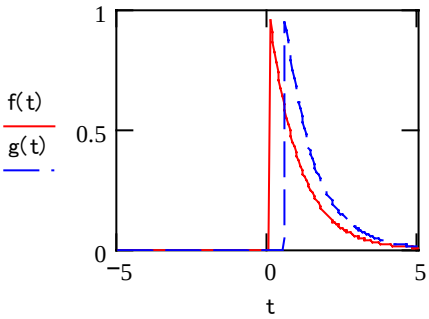
関数 $f(t)$ のフーリエ変換が存在するとして、関数 $f(t)$ をフーリエ変換する操作を $\mathscr{F}[f(t)]$ と書き表すことにする。すなわち、$\mathscr{F}[f(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\exp(-j\omega t)\,dt=F(j\omega)$

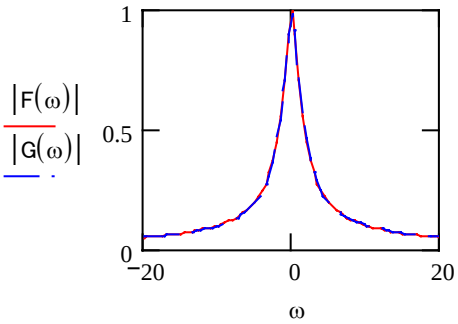
次の関係が成り立つ。

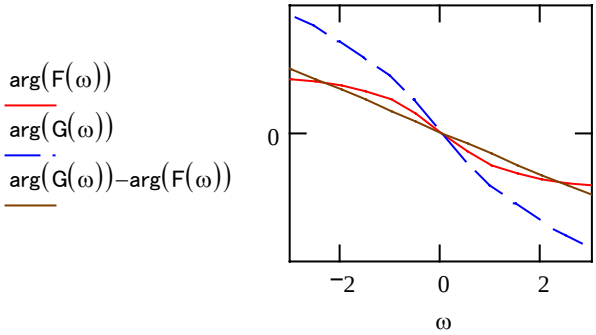
（１）$\mathscr{F}\left[\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)\right]=\alpha\mathscr{F}\left[f_1(t)\right]+\beta\mathscr{F}\left[f_2(t)\right]$　　線形性

（２）$\mathscr{F}[f(t-\tau)]=\exp(-j\omega\tau)\mathscr{F}[f(t)]$　　原関数の移動

波形を時間軸上で平行移動させると、そのスペクトルは振幅は変化せず、位相は－ω τ だけ変化する（位相の変化量はωに比例する）。

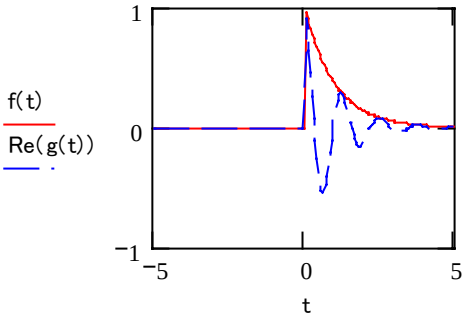


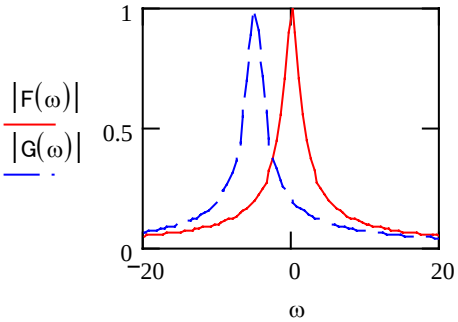


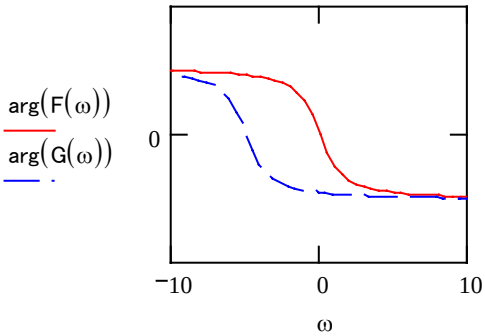


（３） $\mathscr{F}\left[\exp(-jkt)f(t)\right] = F(j\omega + jk)$ 　　像関数の移動

波形と $\exp(-jkt)$ とをかけ算すると（$\exp(-jkt)$ を $f(x)$ で変調すると）、$f(x)$ のスペクトルは角周波数軸上で $-k$ だけ平行移動する。

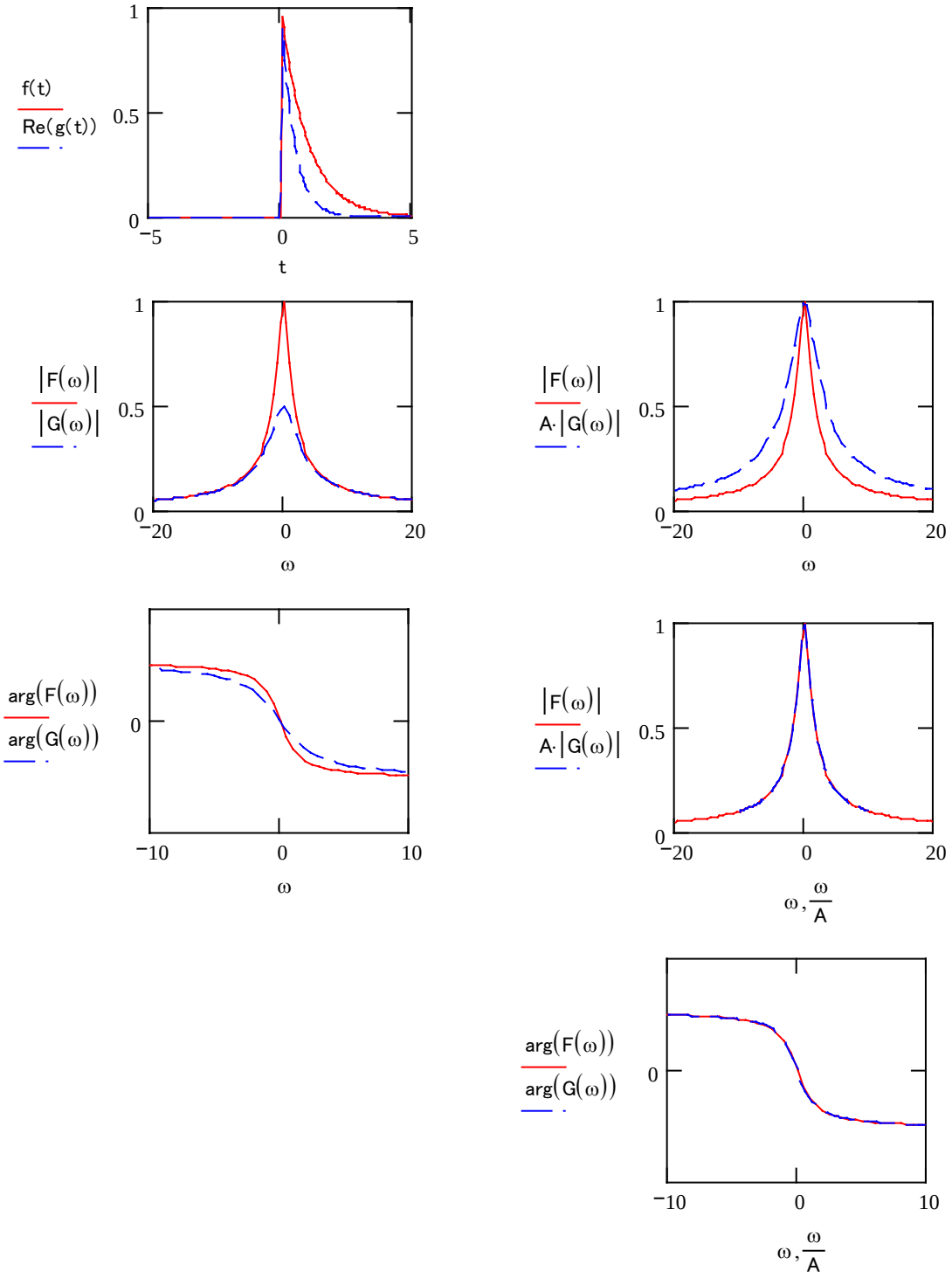






（4） $\mathscr{F}\left[f(At)\right]=\dfrac{1}{A}F\left(\dfrac{j\omega}{A}\right)$ 　　時間軸の拡大

ただし A>0。時間軸を A 倍すると



（５） $\mathscr{F}\left[f^{(n)}(t)\right] = (j\omega)^n \mathscr{F}\left[f(t)\right]$ 　　時間微分

ただし $\lim_{a\to-\infty} f^{(i)}(a) = 0 \quad \lim_{b\to\infty} f^{(i)}(b) = 0 \quad i = 0,1,\cdots n-1$ とする。

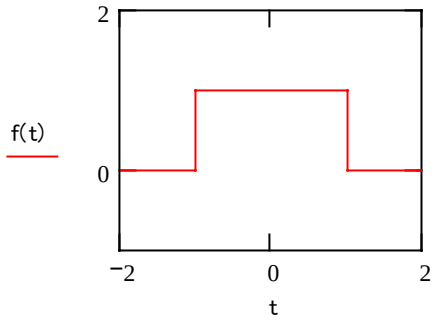
また $f^{(0)}(t) = f(t)$ である。

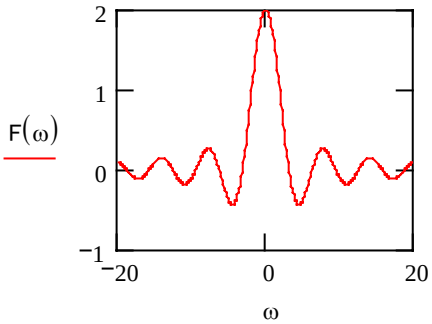
（６） $\mathscr{F}\left[F(jt)\right] = 2\pi f(-\omega)$

フーリエ変換の双対性。

$$f(t) := \begin{cases} 1 & \text{if } |t| \le 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \qquad F(\omega) := 2 \cdot \frac{\sin(\omega)}{\omega}$$

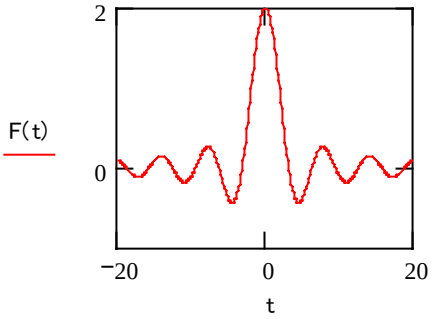
$t := -2, -1.99 .. 2$ 　　$\omega := -20, -19.9 .. 20$

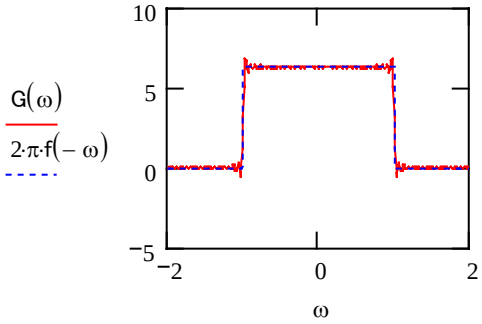




$$G(\omega) := \int_{-100}^{100} F(t) \cdot \exp(-i \cdot \omega \cdot t)\, dt$$

$t := -20, -19.9 .. 20$ 　　$\omega := -2, -1.99 .. 2$





$f(t)$が偶関数のときは、$f(t)$のフーリエ変換をさらにフーリエ変換すると、係数と軸の向きを除いて、元の関数にもどる。

演習 2.3.1　上の関係（１）から（６）を証明せよ。

２．４　畳み込み関数とそのフーリエ変換

次のような積分演算を Convolusion、畳み込み、という。

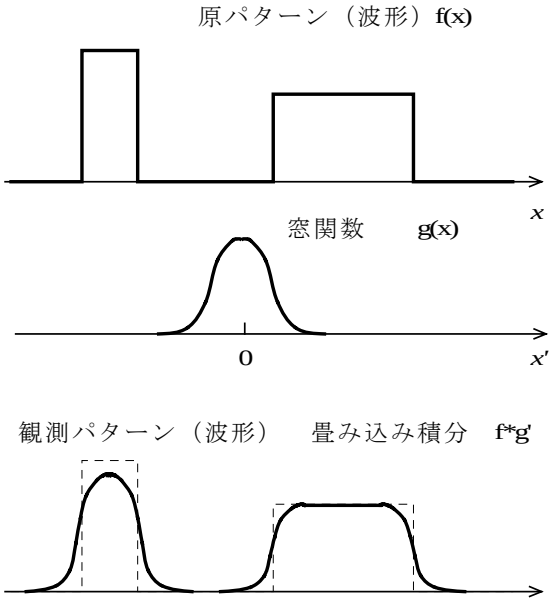
$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(y)f_2(x-y)dy$$

$f(x)$ を関数 $f_1(x), f_2(x)$ の畳み込み関数と呼び、$f=f_1 * f_2$ と表す。

畳み込み関数のフーリエ変換は次のように二つの関数のフーリエ変換の積と等しい。

$$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f_1(y)f_2(x-y)dy\right)\exp(-j\omega x)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(y)\left(\int_{-\infty}^{\infty} f_2(x-y)\exp(-j\omega x)\,dx\right)dy$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(y)\left(\int_{-\infty}^{\infty} f_2(u)\exp\left(-j\omega(u+y)\right)du\right)dy=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(y)\exp(-j\omega y)\,dy\int_{-\infty}^{\infty} f_2(u)\exp(-j\omega u)\,du$$
$$=F_1(j\omega)F_2(j\omega)$$

演習 2.4.1　$\mathscr{F}\left[f_1(t)f_2(t)\right]=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} F_1(j\omega-jy)F_2(jy)dy$ を証明せよ。

なぜこんな積分を定義するのかは次の 3.1 で分かるが、その前に別の例を示しておこう。畳み込み積分の例 : $f(x)$ という１次元の空間パターンがある。このパターンを写し取るのに有限の空間分解能をもつ検出器を用いたとする。すなわち $g(x')$ という窓関数を定義すると、写し取った後のパターン $h(x)$ は、$g(x')$ の原点を x に移動した関数 $g(x'-x)$ を $f(x')$ にかけて x' で積分して求められる。すなわち、$h(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x')g(x'-x)dx'$　である。関数 f,g,h の関係の概念図を示す。変数変換 $u=x-x'$ を行うと　$h(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x-u)g(-u)du=\int_{-\infty}^{\infty} f(x-u)g'(u)dv$

ただし $g'(u)=g(-u)$　となり、f と g' との畳み込み積分で表される。