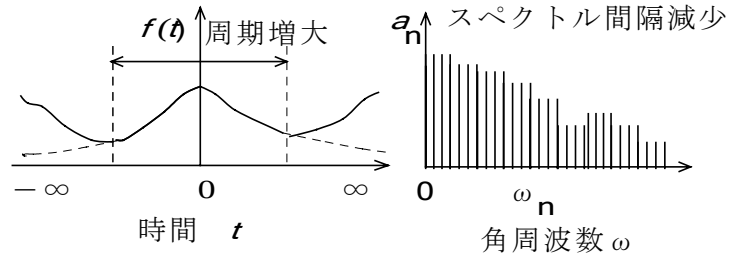


## 2 フーリエ変換

周期関数はフーリエ級数で表された。では非周期的で $-\infty$ から $\infty$ で定義される関数はどのようにして表すことができるだろうか。この問題から考えていこう。

### 2. 1 非周期関数とフーリエ変換

周期関数のフーリエ級数展開において、周期を $\infty$ にすると角周波数間隔は無限小になり、連続スペクトルに移行する。このことを以下で示す。



$f(t)$  は $-\infty < t < \infty$ で定義された関数とする。 $T$ を十分に大きな数として、 $-T/2 \leq t < T/2$ に制限した $f(t)$ を、 $f(t+nT) = f(t)$ で $-\infty < t < \infty$ に周期波形に拡張した関数を $f_T(t)$ とする。今、区間 $-T/2 \leq t < T/2$ を考える。 $\omega_n = n \frac{2\pi}{T}$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ )

$$\begin{aligned} f(t) &= f_T(t) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_T(t') \exp(-j\omega_n t') dt' \right) \exp(j\omega_n t) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t') \exp(-j\omega_n t') dt' \right) \exp(j\omega_n t) \end{aligned}$$

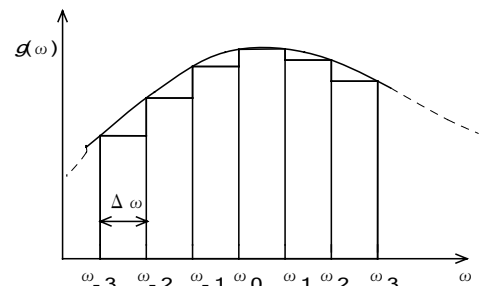
最初の等号は、今、区間 $-T/2 \leq t < T/2$ を考えており、そこでは $f_T(t) = f(t)$ であることによる。次の等号は、 $f_T(t)$ が $-\infty < t < \infty$ で周期関数だからフーリエ級数展開できることによる。そして最後の等号は $f_T(t)$ の定義による。結局、次が成り立つ。

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t') \exp(-j\omega_n t') dt' \right) \exp(j\omega_n t) \quad -T/2 \leq t < T/2$$

$\Delta\omega = \omega_{n+1} - \omega_n = \frac{2\pi}{T}$  とかくと右辺は

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \left( \int_{-T/2}^{T/2} f(t') \exp(-j\omega_n t') dt' \right) \exp(j\omega_n t) \right) \Delta\omega \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(\omega_n) \Delta\omega \end{aligned}$$

となる。図に示すように、和は階段状曲線と横軸の間の面積に等しい。 $\Delta\omega \rightarrow 0$  とすると、曲線と横軸



との間の面積に漸近する。すなわち積分になる。 $\Delta\omega \rightarrow 0$  ( $T \rightarrow \infty$ ) で、

$$\text{右辺} \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(t') \exp(-j\omega t') dt' \right) \exp(j\omega t) d\omega \quad \text{となる。}$$

以上により次の式を得る。

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(t') \exp(-j\omega t') dt' \right) \exp(j\omega t) d\omega \quad -\infty < t < \infty$$

ここで次のように  $F(j\omega)$  を定義する。

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-j\omega t) dt \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) \exp(j\omega t) d\omega$$

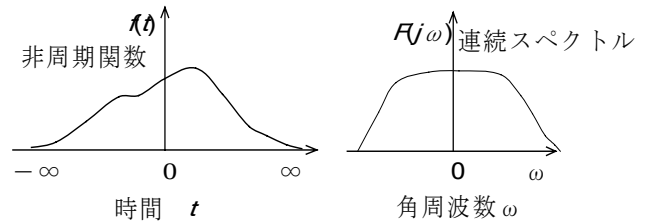
$F(j\omega)$  を  $f(t)$  のフーリエ変換と呼ぶ。 $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-j\omega t) dt$  を  $f(t)$  のフーリエ積分と呼ぶ。

非周期関数  $f(t)$  はそのフーリエ変換  $F(j\omega)$  を用いてフーリエ積分によって表すことができる。 $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) \exp(j\omega t) d\omega$  をフーリエ逆変換と呼ぶ。

$f(t)$  が実関数の場合には  $F(-j\omega) = F^*(j\omega)$  である。

フーリエ逆変換の式は、関数  $f(t)$  が様々な角周波数  $\omega$  の複素指数関数  $\exp(j\omega t)$  の重ね合

わせから成り立っていることを示す。そして  $F(j\omega)$  は角周波数  $\omega$  の成分がどれだけ含まれているか、角周波数の分布を表している。そこで  $f(t)$  のフーリエ変換  $F(j\omega)$  は、また  $f(t)$  のスペクトル密度とも呼ぶ。これは角周波数の連続関数である。すなわち非周期関数のスペクトルは連続である。



$f(t)$  が実関数の場合にはすべて実関数だけで表現することもできる。

$$F(j\omega) = A(\omega) - jB(\omega) \quad A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt \quad B(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt$$

$A(\omega)$  をフーリエ余弦変換、 $B(\omega)$  をフーリエ正弦変換とよぶ。 $f(t)$  が対称関数ならば  $B(\omega) = 0$ 、反対称関数ならば  $A(\omega) = 0$  である。

$A(-\omega) = A(\omega)$ ,  $B(-\omega) = -B(\omega)$  が成り立つからフーリエ逆変換は次になる。

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) \exp(j\omega t) d\omega - j \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B(\omega) \exp(j\omega t) d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} A(\omega) \cos \omega t d\omega + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} B(\omega) \sin \omega t d\omega \end{aligned}$$

**注意！** フーリエ変換の定義には次のようなものもあり、そちらもよく使われる。係数と符号とが異なる。公式を用いるときは定義を確認しよう。

(指数形) フーリエ変換 (岩波公式Ⅱなど)

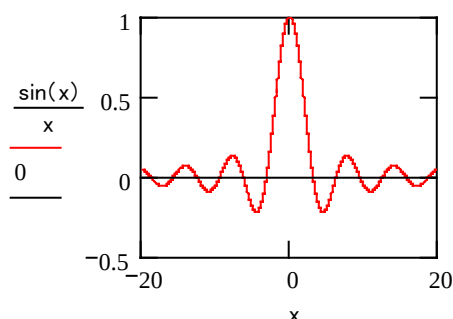
$$F(j\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(j\omega t) dt \quad f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) \exp(-j\omega t) d\omega$$

**演習 2.1.1** 単一矩形パルスのスペクトルを求め、図示せよ。スペクトルの広がりについて考察せよ。どこまで広がっているか、スペクトルが最大値からその半分まで減少する角周波数幅はいくらか、スペクトルが最初に 0 になるまでの角周波数幅はいくらか、これらの角周波数幅（スペクトル広がり）とパルス幅との積はいくらか、それはパルス幅に依存するか否か、などの観点から考察し、結果を述べよ。

$$f(t) = \begin{cases} E & (|t| \leq a) \\ 0 & (|t| > a) \end{cases}$$

$$F(j\omega) = 2Ea \frac{\sin \omega a}{\omega a}$$

x := -20, -19.99, 20



**演習 2.1.2** 単一ガウスパルスのスペクトルを求め、図示せよ。ガウスパルスには大きな特徴がある。それは何か？スペクトルの広がりについて考察せよ。どこまで広がっているか、スペクトルが最大値からその半分まで減少する角周波数幅はいくらか、角周波数幅（スペクトル広がり）とパルス幅との積はいくらか、それはパルス幅に依存するか否か、矩形パルスと較べて積の値は大きい小さいか、などの観点から考察し、結果を述べよ。

$$f(t) = E \exp\left(-\left(\frac{2t}{B}\right)^2\right)$$

ヒント 数学公式  $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-at^2) \exp(j\omega t) dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(-\frac{\omega^2}{4a}\right)$  を用いよ。

**演習 2.1.3** 次の減衰関数のフーリエ変換を求めよ。

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ \exp(-\alpha t) & (t \geq 0) \end{cases} \quad \alpha > 0$$

$$F(j\omega) = \frac{1}{\alpha + j\omega}$$

## 2. 2 デルタ関数

$\delta$  (デルタ) 関数は次の(i)から(iii)の性質をもつ関数として定義される。

$$(i) \quad \delta(x) = \begin{cases} \infty & (x = 0) \\ 0 & (x \neq 0) \end{cases}$$

$$(ii) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

$$(iii) \quad \text{任意の関数 } f(x) \text{ に対して } \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \delta(u-x) du = f(x) \text{ となる。}$$

$\delta$  関数は偶関数  $\delta(-t) = \delta(t)$  である。 $\delta$  関数のフーリエ変換は次のようになる。

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \exp(-j\omega t) dt = \exp(-j\omega 0) = 1$$

すなわちスペクトルは $-\infty$ から $\infty$ まで無限に広がり、かつその値は $\omega$ によらず一定である。

$\delta$  関数は、**演習 2.1.1** で扱った単一矩形パルスの幅  $2a$  と高さ  $E$  の積が 1 になるようにして  $a \rightarrow 0$  にしたものである。なぜならば定義 (i) から (iii) を満たすからである。

ところで  $\delta$  関数は **1.1.4** で述べたフーリエ級数収束の必要十分条件は満たしていない。これは数学的には超関数と呼ばれる。普通とは異なる関数であるが、とても便利な関数でよく使われる。ディラック(Dirac)のデルタ関数と呼ばれるように、物理学者ディラックによって導入された。

**演習 2.2.1** スペクトル  $F(j\omega) = 1$  を用いてフーリエ逆変換によって

$$\delta(t) = \lim_{g \rightarrow \infty} \frac{\sin gt}{\pi t} \quad \text{となることを導け。}$$

## 2. 3 フーリエ変換の存在と性質

フーリエ変換の存在:  $f(x)$  は  $(-\infty, \infty)$  上で定義された関数で、どんな有限区間  $[a, b]$  でも

$$f(x) \text{ が積分可能であるとし } (f(t) \exp(-j\omega t) \text{ も積分可能})、\text{ 広義積分 } \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow \infty}} \int_a^b f(t) \exp(-j\omega t) dt$$

が有限値として存在するならばフーリエ変換は存在する。

関数  $f(t)$  のフーリエ変換が存在するとして、関数  $f(t)$  をフーリエ変換する操作を

$$\mathcal{F}[f(t)] \text{ と書き表すことにする。すなわち、} \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-j\omega t) dt = F(j\omega)$$

次の関係が成り立つ。

$$(1) \quad \mathcal{F}[\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)] = \alpha \mathcal{F}[f_1(t)] + \beta \mathcal{F}[f_2(t)] \quad \text{線形性}$$

$$(2) \quad \mathcal{F}[f(t - \tau)] = \exp(-j\omega\tau) \mathcal{F}[f(t)] \quad \text{原関数の移動}$$

波形を時間軸上で平行移動させると、そのスペクトルは振幅は変化せず、位相は  $-\omega\tau$  だけ変化する (位相の変化量は  $\omega$  に比例する)。