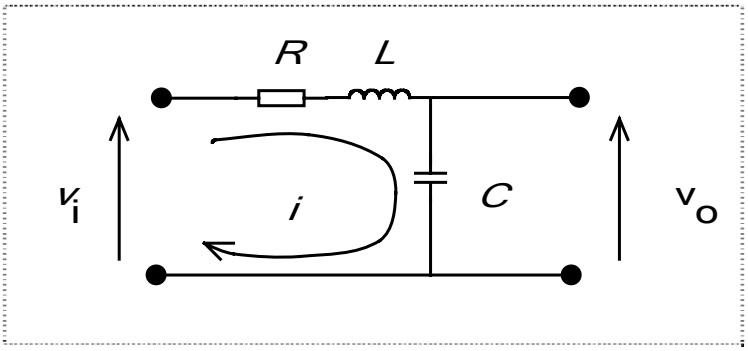
１．３　回路の周期波形応答

１．３．１　LCR 回路が線形システムであること

図の平滑回路を例に用いて説明する。R は抵抗値、L はインダクタンス値、C はキャパシタンス値を表す。左側の二端子に入力電圧 $v_i(t)$ を印加し、右側の二端子の出力電圧を $v_o(t)$ とする。



各素子における電圧と電流の関係は、物理学（電磁気学）により規定される。それに基づき次の微分方程式が成り立つ。

$$v_i(t) = Ri(t) + L\frac{d}{dt}i(t) + v_0(t) \qquad i(t) = C\frac{d}{dt}v_0(t)$$

電流を消去して次式を得る。

$$LC\frac{d^2}{dt^2}v_0(t) + RC\frac{d}{dt}v_0(t) + v_0(t) = v_i(t) \qquad (1)$$

LCR 回路が線形システム（**0** 参照）であることは次のよう確認される。

入力関数 $v_{im}(t)$ に対する出力関数を $v_{0m}(t)$ とする。すなわち、

$$LC\frac{d^2}{dt^2}v_{0m}(t) + RC\frac{d}{dt}v_{0m}(t) + v_{0m}(t) = v_{im}(t) \quad (m = 1,2,3,\cdots) \qquad (2)$$

$\{b_m\}(m = 1,2,3,\cdots)$ を任意の係数として　$\sum_{m=1}^{M} b_m v_{im}(t)$　を入力すると　$\sum_{m=1}^{M} b_m v_{om}(t)$　が出力されることを証明できる。

演習 **1.3.1**　図の LCR 回路が線形システムであることを示せ。 **0 線形システム**で述べた定義を参照せよ。

１．３．２　回路と複素指数関数

cos 関数を入力関数に選ぶと、式(2)の解である出力関数を容易に求めることができる。それを示そう。ただし、ここが重要！、cos 関数をそのままの形では用いないで、次のように複素指数関数の実部として表す。

$$v(t) = \mathrm{Re}\left[V\exp(j\omega t)\right] (= |V|\cos(\omega t + \theta) \quad \text{ただし}\,\theta = \arg[V])$$

ここで、Vを複素振幅と呼ぶ。複素振幅は cos 関数の振幅と位相の情報を担っている。

式(2)に、$v_{om}(t) = \mathrm{Re}\left[V_{om}\exp(j\omega_m t)\right]$と$v_{im}(t) = \mathrm{Re}\left[V_{im}\exp(j\omega_m t)\right]$を代入し、移項する。

$$\left(LC\frac{d^2}{dt^2} + RC\frac{d}{dt} + 1\right)\mathrm{Re}\left[V_{om}\exp(j\omega_m t)\right] - \mathrm{Re}\left[V_{im}\exp(j\omega_m t)\right] = 0$$

係数はすべて実数。微分演算では実部と虚部の入れ替わりは起こらない。よって実部を採る演算は最後にまわす。

$$\mathrm{Re}\left[\left(LC\frac{d^2}{dt^2} + RC\frac{d}{dt} + 1\right)V_{om}\exp(j\omega_m t) - V_{im}\exp(j\omega_m t)\right] = 0$$

微分を実行すると次になる。

$$\mathrm{Re}\left[\left(V_{om}\left(-\omega_m{}^2 LC + j\omega_m RC + 1\right) - V_{im}\right)\exp(j\omega_m t)\right] = 0 \qquad (3)$$

$\exp(j\omega_m t)$を微分すると再び$\exp(j\omega_m t)$になる。これが関数$\mathrm{Re}\left[V\exp(j\omega t)\right]$を用いた理由である。**0** で述べた適切な関数の選択になる。式(3)がいかなる t に対しても成り立つためには次の複素方程式が成り立たなければならない。

$$V_{om}\left(-\omega_m{}^2 LC + j\omega_m RC + 1\right) - V_{im} = 0$$

これを解いて次を得る。

$$\frac{V_{om}}{V_{im}} = K(j\omega_m) \qquad K(j\omega_m) = \frac{1}{-\omega_m{}^2 LC + j\omega_m RC + 1}$$

この最後の結果$K(j\omega_m)$は回路の伝達関数と呼ばれる。伝達関数は交流回路の方法（$j\omega$の方法）で、上述の微分方程式を経由することなく、回路を見て直接書き下すことができる。以上をまとめると、$\mathrm{Re}\left[V\exp(j\omega t)\right]$　に対する回路の出力は　$\mathrm{Re}\left[K(j\omega)V\exp(j\omega t)\right]$である。

演習 **1.3.2**　式(3)を導出せよ。級数展開に用いる関数に$\mathrm{Re}\left[V\exp(j\omega t)\right]$を選ばずに cos、sin 関数を用いたらどうなるか考えて答えよ。