１．１．４　フーリエ級数の収束（定理）

フーリエ級数の収束について数学的証明がなされている（参考書を付録の中で挙げた）。工学分野で実際に現れる関数に対しては、収束に関して次の定理で十分である。

定理（区分的に微分可能な関数の収束定理）

$f(t)$ は区分的に微分可能な周期関数とすると、すべての $\boldsymbol{t}$ でフーリエ級数は収束し、収束値は　$\frac{1}{2}\big(f(t+0)+f(t-0)\big)$　に一致する。

特に $\boldsymbol{t}$ が $f(t)$ が連続な点であれば $f(t)$ に一致する。

証明は付録参照

”区分的に微分可能”とは、ある区間で関数 $f(t)$ が定義されているとき、その区間は有限個の点で小区間に分割されて、各小区間では微分が可能（連続かつ滑らか）であり、かつ、各小区間の両端点では、その小区間内から端点に近づいたときの極限値が存在し、さらに擬微係数 $\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t-\Delta t)-f(t-0)}{-\Delta t}$ または $\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t+0)}{\Delta t}$ が存在することをいう。ここで、$f(t+0)$ は、点 t にプラス側から近づいていったときの関数の極限値。$f(t-0)$ はマイナス側からの極限値。不連続点では両者は一致しない。

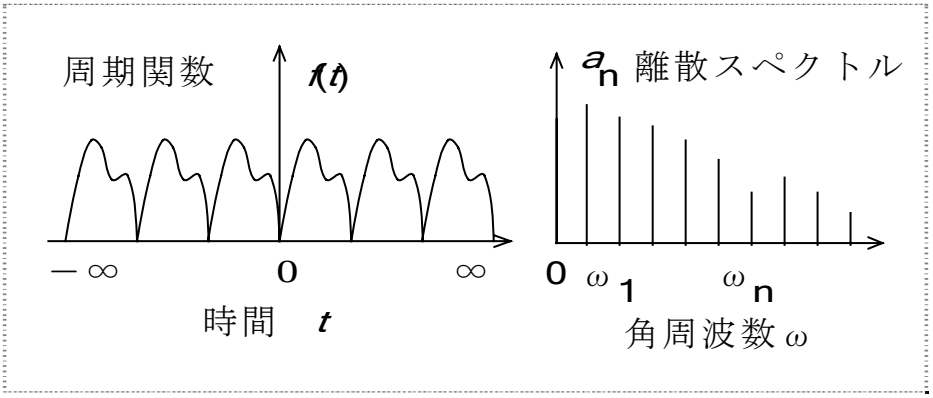
工学で現れる関数は、不連続点や、折れ曲がり点をもつ関数であっても、ほとんどすべてこの定理の条件を満たしており、フーリエ級数は収束すると考えてよい。

１．１．５　周期関数と離散スペクトル

$f_0 = \dfrac{1}{T}$ を基本周波数、$\omega_0 = 2\pi f_0$ を基本角周波数と呼ぶ。フーリエ級数は、直流および基本角周波数の整数倍の正弦および余弦関数項からなる。

上述のことは、波形は基本角周波数の整数倍の振動成分からなりたっている、と言うことができる。$\omega_n = n\omega_0 \quad (n = 1,2,3,\cdots)$ として、角周波数 ω_n（$n \geq 2$）の振動成分を高調波とよぶ。フーリエ係数 a_n および b_n は基本波、高調波のまざり具合を表している。関数に含まれるこれらの波動成分の分布をスペクトルと呼ぶ。

重要な点として、周期関数のスペクトルは離散的である（図参照）。離散角周波数 ω_n の間隔　$\Delta\omega = \omega_{n+1} - \omega_n$ は $\dfrac{2\pi}{T}$　であり、周期に反比例する。離散値間の連続角周波数成分は含まれない。後述の標本化定理でこの事実を思い出すであろう。



区間 $[0,T]$ だけで非零の値をもつ関数 $f(t)$ は周期関数ではない。このままではフーリエ級数展開できない。フーリエ級数が区間外で非零値をもつからだ。そこで $g(t+mT) = f(t)$ として区間外の値を与え、周期関数に定義しなおせばフーリエ級数展開できる。そして区間 $[0,T]$ に限って使えば元々の関数 $f(t)$ と同一である。この関数のスペクトルは離散的である。

演習 1.1.1　全波整流波形 $|\sin\omega t|$ をフーリエ級数展開せよ。

演習 1.1.2　半波整流波形をフーリエ級数展開せよ。

演習 1.1.3　矩形パルス波形

$$e(t) = \begin{cases} -1 & -\dfrac{T}{2} \leq t < 0 \\ 1 & 0 \leq t < \dfrac{T}{2} \end{cases}$$

のフーリエ級数展開が　$\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} \frac{4}{\pi} \frac{1}{2m-1} \sin(2m-1)\frac{2\pi}{T}t$　となることを確かめよ。

演習 1.1.4　$f(t) = t^2 \quad 0 \leq t < T$ で与えられる周期 T の関数をフーリエ級数展開せよ。

１．２　複素フーリエ級数

オイラーの公式　$\exp(jx) = \cos x + j\sin x$　を用いて三角関数を複素指数関数で表す。

$$\cos x = \frac{1}{2}\left(\exp(jx) + \exp(-jx)\right) \quad \sin x = \frac{1}{2j}\left(\exp(jx) - \exp(-jx)\right)$$

電気・電子工学では慣例として虚数単位$\sqrt{-1}$をjで表す（数学や物理ではi）。
これを用いてフーリエ級数を複素指数関数で表そう。

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n - jb_n}{2}\exp\left(jn\omega_0 t\right) + \frac{a_n + jb_n}{2}\exp\left(-jn\omega_0 t\right)\right)$$

a_n, b_nを代入して（ ）内の係数は次になる。

$$\frac{a_n - jb_n}{2} = \frac{1}{T}\left(\int_T f(t)\cos n\omega_0 t dt - j\int_T f(t)\sin n\omega_0 t dt\right) = \frac{1}{T}\int_T f(t)\exp\left(-jn\omega_0 t\right)dt$$

$$\frac{a_n + jb_n}{2} = \frac{1}{T}\int_T f(t)\exp\left(jn\omega_0 t\right)dt$$

ここで新たな係数c_nを次のように定義する。積分範囲は任意にとった一周期である。

$$c_n = \frac{1}{T}\int_T f(t)\exp\left(-jn\omega_0 t\right)dt$$

a, b係数とc係数との関係は次のようになっている。

$$c_n = \frac{a_n - jb_n}{2} \qquad c_{-n} = \frac{a_n + jb_n}{2} \qquad a_n = c_n + c_{-n} \quad b_n = j\left(c_n - c_{-n}\right)$$

これらをフーリエ級数式に代入すると次のフーリエ級数の複素表現を得る。

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n \exp\left(jn\omega_0 t\right) + c_{-n}\exp\left(-jn\omega_0 t\right)\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(jn\omega_0 t\right)$$

関数fが実関数の場合、a, b係数はすべて実数である。そうすると

$$c_{-n} = c_n^*$$

である。ただし*は複素共役の記号である。フーリエ級数は次になる。

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n \exp\left(jn\omega_0 t\right) + c.c.\right) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Re}\left[2c_n \exp\left(jn\omega_0 t\right)\right]$$

ただし、c.c.は前の項の複素共役項を表す。Re[ ]は実部を取り出すことを表す。