フーリエ変換及びラプラス変換　　古 屋　一 仁

2008 年度講義予定

１	４月１０日	１　フーリエ級数 線形システム　周期関数　フーリエの主張　フーリエ級数の収束（数値実験）	1.1.3 まで
2	１７日	１　フーリエ級数 フーリエ級数の収束（定理）　周期関数と離散スペクトル　複素フーリエ級数	1.2 まで
3	２４日	１　フーリエ級数 LCR 回路が線形システムであること　回路と複素指数関数	1.3.2 まで
4	５月　１日	１　フーリエ級数 周期波形に対する回路の応答	1.3.3 まで
5	１５日	２　フーリエ変換 非周期関数とフーリエ変換　デルタ関数	2.2 まで
6	２２日	２　フーリエ変換 フーリエ変換の存在と性質　畳み込み関数とそのフーリエ変換	2.4 まで
7	２９日	中間試験　（フーリエ級数、フーリエ変換）	2.4 まで
8	６月　５日	３　時間領域と周波数領域 時間領域表示と周波数領域表示	3.1 まで
9	１２日	３　時間領域と周波数領域 時間波形と周波数スペクトルとの双対性　パーセバルの等式	3.3 まで
１０	１９日	３　時間領域と周波数領域 シャノンの標本化定理　回路の波形応答と周波数応答	3.5 まで
１１	２６日	４　離散フーリエ変換 周期関数のサンプリング値から求めたフーリエ係数　離散フーリエ変換	4.2 まで
１２	７月　３日	５ラプラス変換 0-∞上の関数とラプラス変換	5.1 まで
１３	１０日	５ラプラス変換 ラプラス変換の性質　ラプラス変換による微分方程式解法	5.3 まで
１４	１７日	５ラプラス変換 回路の過渡応答	5.4 まで

0　線形システムとは

これから線形システム（**linear system**）でよく用いられる数学を学ぶ。
そこでまず「線形システムとは何か？」について説明しよう。
電気回路の入力端子と出力端子の関係を例にとる（下図参照）。
時間関数 $f(t)$ で変化する電圧入力に対する電圧出力の時間関数を $y(t)$ とする。

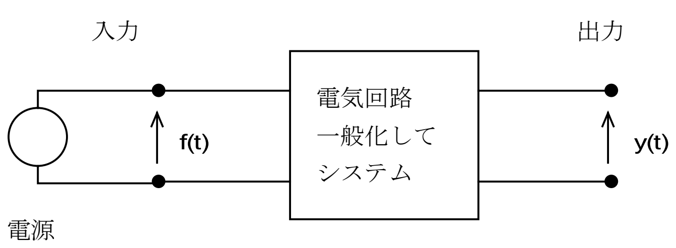
$i = 1, 2, \cdots, n$ として入力 $f_i(t)$ に対する出力を $y_i(t)$ とする。このとき

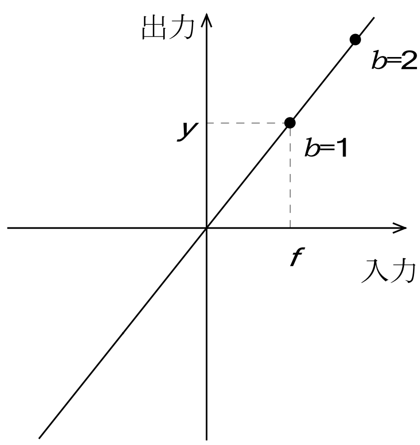
b_i を任意の定数として、入力 $\sum_{i=1}^{n} b_i f_i(t)$ に対する出力が $\sum_{i=1}^{n} b_i y_i(t)$ となるならば、このシステムは線形システムである。

なぜ線形と呼ぶのか？　n=1 の場合を考える。入力は $b_1 f_1(t)$、出力は $b_1 y_1(t)$ となる。定数 b_1 を変化させたとき、任意の時刻 t_1 での入出力振幅の関係をグラフにすると直線になる（下図）。すなわち線形である。どんな実際のシステムが線形システムであるのかは後から説明しよう。

線形システムでは、ある入力 $f(t)$ に対する出力 $y(t)$ を求める目的で、まず $f(t) = \sum_{i=1}^{n} b_i f_i(t)$ として係数 b_i を決める。その b_i を用いて $y(t) = \sum_{i=1}^{n} b_i y_i(t)$ を得る。ここで関数（群） $f_i(t)$ は、$f_i(t)$ から容易に $y_i(t)$ が求まるような関数が選ばれる。

$f_i(t)$ として三角関数を選んだのがフーリエ（**Fourier**）級数である。





１　フーリエ級数

周期的な関数 $f(t)$ は三角関数の級数で表すことができ、この級数はフーリエ（Fourier）級数と呼ばれる。ここでの説明では変数を時間 t とする。ここで説明する考え方は空間座標の関数にも同様に適用できる。

１．１　周期関数とフーリエ級数

１．１．１　周期関数

次式を満たす関数 $f(t)$ は周期関数である。

$$f(t) = f(nT + t) \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \tag{1}$$

ただし T は周期で、この条件を成り立たせる値の最小値とする。

一方、次の関数は周期 T の関数列である。$\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi f_0$ とする。

$$1,\ \cos\omega_0 t, \cos 2\omega_0 t, \cdots, \cos n\omega_0 t, \cdots \qquad \sin\omega_0 t, \sin 2\omega_0 t, \cdots, \sin n\omega_0 t, \cdots \tag{2}$$

１．１．２　フーリエの主張

式(1)の関数 $f(t)$ を三角関数の和として表現する。これを展開するという。

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega_0 t \tag{3}$$

右辺をフーリエ級数という。$a_n (n = 0, 1, 2, \cdots)$,　$b_n (n = 1, 2, \cdots)$ をフーリエ係数という。

式(3)が成り立つとしてフーリエ係数を求める。

実は、式(3)が成り立つかどうかは大問題である。1822 年に**フーリエは「周期関数は式(3)の三角級数で表すことができる」と主張した。**当時の議論には数学的厳密性は欠けていた。しかし物理や工学の応用にたいへんに役立った。当時は産業革命の時代で、蒸気機関が活躍し、熱伝導問題が重要だった。フーリエは彼の主張に基づいて熱伝導方程式（付録参照）を解くことに成功した。さらにフーリエの主張は数学の発展に寄与した。そして今では、フーリエの主張が成り立つ関数の範囲（付録参照）が研究され明らかになっている。

式(3)の両辺に$\cos m\omega_0 t \quad (m=0,1,2,\cdots)$をかけて一周期 Tにわたって積分する。被積分関数が周期 Tの周期関数（周期関数の積はやはり同じ周期の周期関数である）なので、積分範囲は任意に選べる。以下で範囲指定を省略した場合は任意の一周期を示す。

注意！フーリエ係数に用いられる積分は**不定積分（時間の関数）**ではなく、**定積分（時間の関数ではない）である。**積分範囲を省略した積分記号は、不定積分と区別が付かなくなってしまう。本講義では、添え字で周期を示す Tを付けて定積分であることを明示する。

$$\int_T f(t)\cos m\omega_0 t dt = \frac{a_0}{2}\int_T \cos m\omega_0 t dt + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_T \cos n\omega_0 t \cos m\omega_0 t dt + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_T \sin n\omega_0 t \cos m\omega_0 t dt$$

右辺は、$u=\omega_0 t$と変数変換し、積分範囲を指定すると次になる。

$$\begin{aligned}
&\frac{a_0}{2}\frac{1}{\omega_0}\int_{-\pi}^{\pi}\cos mu du + \frac{1}{\omega_0}\sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi}\cos nu \cos mu du + \frac{1}{\omega_0}\sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi}\sin nu \cos mu du \\
&= \frac{a_0}{2}\frac{1}{\omega_0}\int_{-\pi}^{\pi}\cos mu du + \frac{1}{\omega_0}\sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi}\cos nu \cos mu du = \frac{a_0}{2} T\delta_{0m} + \frac{T}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty} a_n \delta_{nm}\pi = \frac{T}{2}a_m
\end{aligned}$$

ここで次の直交性を用いた。$m,n=1,2,3,\cdots$, δ_{nm}はクロネッカーデルタで、$n=m$ならば 1、そうでなければ 0 を表す。

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx \cos nx dx = 0 \qquad \int_{-\pi}^{\pi}\sin mx \sin nx dx = \pi\delta_{nm} \qquad \int_{-\pi}^{\pi}\cos mx \cos nx dx = \pi\delta_{nm}$$

これより

$$a_n = \frac{2}{T}\int_T f(t)\cos n\omega_0 t dt \qquad (n=0,1,2,\cdots)$$

b_nも同様にして得られ次になる。

$$b_n = \frac{2}{T}\int_T f(t)\sin n\omega_0 t dt \qquad (n=1,2,\cdots)$$

関数$f(t)$が偶関数または奇関数のとき、それぞれ$b_n=0$または$a_n=0$となる。

演習 1.1.1

１）三角関数の直交性が成り立つことを確かめよ。

２）フーリエ係数 b_nの式を導出せよ。

３）展開係数の式を得るために三角関数の直交性はどのように使われたか。
もし仮に直交性が成り立たなかったらどうなるか考えよ。

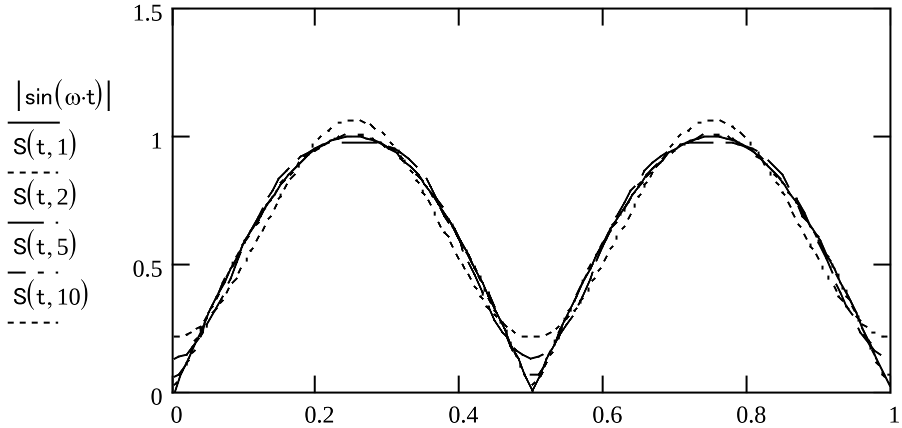
１．１．３　フーリエ級数の収束（数値実験）

先の疑問「式(3)が成り立つかどうか」は、言い換えると、「フーリエ級数は和の項数 n を十分に大きくすると、級数の値は収束し、元の関数の値に一致するのか？」となる。ここではこれについて数値実験で調べて、広い範囲の関数について成り立つことを示す。

数値実験１（全波整流波形）

$f(t) = |\sin \omega t|$　からフーリエ係数を求めた結果は　$S_n(t) = \dfrac{2}{\pi}\left(1 + 2\sum_{m=1}^{n} \dfrac{\cos 2m\omega t}{1-4m^2}\right)$　である。

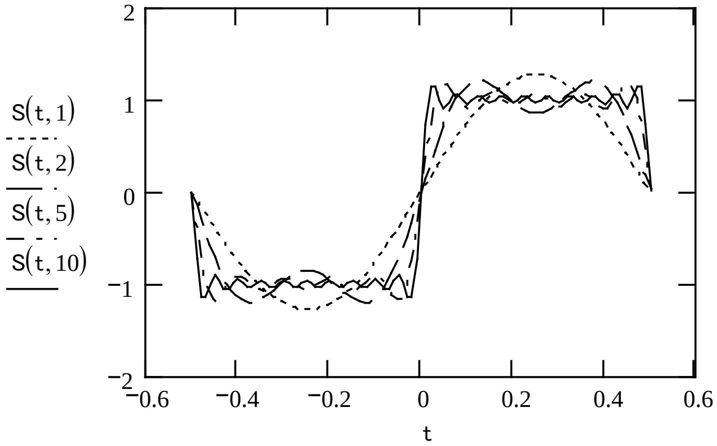
$$S(t,n) := \frac{2}{\pi} \cdot \left(1 + 2 \cdot \sum_{m=1}^{n} \frac{\cos(2 \cdot m \cdot \omega \cdot t)}{1 - 4 \cdot m^2}\right) \qquad t := 0, 0.01..1$$



実線が元の関数、和をとる項数 n を 1 から 10 まで増加させるにつれて級数が元の波形に近づく。この関数は t=0, 0.5, 1 で滑らかになっていない特徴をもつ。滑らかでない部分をもつ関数もフーリエ級数で表すことができることが示された。

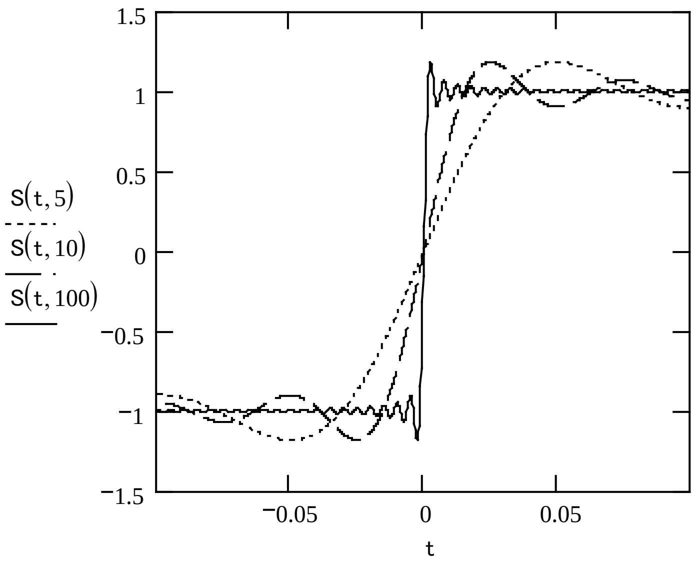
数値実験２（矩形パルス）

$$f(t)=\begin{cases}-1 & -\dfrac{T}{2}\le t<0\\ 1 & 0\le t<\dfrac{T}{2}\end{cases}\qquad S_n(t)=\frac{4}{\pi}E\sum_{m=1}^{n}\frac{\sin(2m-1)\omega t}{2m-1}$$



項数 n を大きくすると元の波形が表現できるようにみえる。この関数は t=0,0.5 に不連続点をもつのが特徴である。

不連続点 t=0 では、フーリエ級数値は、両側からの極限値 $f(0_+)=1$ と $f(0_-)=-1$ の平均値 0 をとることに注目。



よくみると不連続点付近に振動が見える。項数 n を増やしても振動振幅は減少しない。これをギブスが発見し（1899)、ギブスの現象と呼ばれる。フーリエの主張から 77 年後であった。不連続点付近ではフーリエ級数の収束が著しく遅い（多数の項を用いないと元の関数を表現できない)。収束の速さが t の値に依存し、収束は（t に対して）一様でない。

不連続な関数をフーリエ級数で表すと連続関数になってしまう。不連続点での関数値は両側からの極限値の平均値になる。この違いを除けば、不連続点をもつ関数もフーリエ級数で表すことができる。

以上、数値実験でフーリエ級数が元の関数を表すことを確認した。関数に不連続点がある場合、折れ曲がり点がある場合でも級数展開できている。