

フーリエ変換及びラプラス変換 古屋 一 仁

| | | |
|---------|--------------------------------|----|
| 0 | 線形システムとは..... | 3 |
| 1 | フーリエ級数..... | 4 |
| 1. 1 | 周期関数とフーリエ級数..... | 4 |
| 1. 1. 1 | 周期関数..... | 4 |
| 1. 1. 2 | フーリエの主張..... | 4 |
| 1. 1. 3 | フーリエ級数の収束 (数値実験)..... | 5 |
| 1. 1. 4 | フーリエ級数の収束 (定理)..... | 8 |
| 1. 1. 5 | 周期関数と離散スペクトル..... | 9 |
| 1. 2 | 複素フーリエ級数..... | 10 |
| 1. 3 | 回路の周期波形応答..... | 11 |
| 1. 3. 1 | LCR 回路が線形システムであること..... | 11 |
| 1. 3. 2 | 回路と複素指数関数..... | 12 |
| 1. 3. 3 | 周期波形に対する回路の応答..... | 13 |
| 2 | フーリエ変換..... | 15 |
| 2. 1 | 非周期関数とフーリエ変換..... | 15 |
| 2. 2 | デルタ関数..... | 18 |
| 2. 3 | フーリエ変換の存在と性質..... | 18 |
| 2. 4 | 畳み込み関数とそのフーリエ変換..... | 22 |
| 3 | 時間領域と周波数領域..... | 23 |
| 3. 1 | 時間領域表示と周波数領域表示..... | 23 |
| 3. 2 | 時間波形と周波数スペクトルとの双対性..... | 25 |
| 3. 3 | パーセバルの等式..... | 26 |
| 3. 4 | シャノンの標本化定理..... | 27 |
| 3. 5 | 回路の波形応答と周波数応答..... | 33 |
| 4 | 離散フーリエ変換..... | 36 |
| 4. 1 | 周期関数のサンプリング値から求めたフーリエ係数..... | 36 |
| 4. 2 | 離散フーリエ変換..... | 37 |
| 5 | ラプラス変換..... | 39 |
| 5. 1 | $[0, \infty)$ 上の関数とラプラス変換..... | 39 |
| 5. 2 | ラプラス変換の性質..... | 42 |
| 5. 3 | ラプラス変換による微分方程式解法..... | 43 |
| 5. 4 | 回路の過渡応答..... | 46 |

2008 年度講義予定

| | | | |
|----|-------|--------------------------------------------------|----------|
| 1 | 4月10日 | 1 フーリエ級数 線形システム 周期関数 フーリエの主張 フーリエ級数の収束 (数値実験) | 1.1.3 まで |
| 2 | 17日 | 1 フーリエ級数 フーリエ級数の収束 (定理) 周期関数と離散スペクトル 複素フーリエ級数 | 1.2 まで |
| 3 | 24日 | 1 フーリエ級数 LCR 回路が線形システムであること 回路と複素指数関数 | 1.3.2 まで |
| 4 | 5月 1日 | 1 フーリエ級数 周期波形に対する回路の応答 | 1.3.3 まで |
| 5 | 15日 | 2 フーリエ変換 非周期関数とフーリエ変換 デルタ関数 | 2.2 まで |
| 6 | 22日 | 2 フーリエ変換 フーリエ変換の存在と性質 畳み込み関数とそのフーリエ変換 | 2.4 まで |
| 7 | 29日 | 中間試験 (フーリエ級数、フーリエ変換) | 2.4 まで |
| 8 | 6月 5日 | 3 時間領域と周波数領域 時間領域表示と周波数領域表示 | 3.1 まで |
| 9 | 12日 | 3 時間領域と周波数領域 時間波形と周波数スペクトルとの双対性 パーセバルの等式 | 3.3 まで |
| 10 | 19日 | 3 時間領域と周波数領域 シャノンの標本化定理 回路の波形応答と周波数応答 | 3.5 まで |
| 11 | 26日 | 4 離散フーリエ変換 周期関数のサンプリング値から求めたフーリエ係数 離散フーリエ変換 | 4.2 まで |
| 12 | 7月 3日 | 5 ラプラス変換 $0\sim\infty$ 上の関数とラプラス変換 | 5.1 まで |
| 13 | 10日 | 5 ラプラス変換 ラプラス変換の性質 ラプラス変換による微分方程式解法 | 5.3 まで |
| 14 | 17日 | 5 ラプラス変換 回路の過渡応答 | 5.4 まで |

0 線形システムとは

これから線形システム (**linear system**) でよく用いられる数学を学ぶ。

そこでまず「線形システムとは何か？」について説明しよう。

電気回路の入力端子と出力端子の関係を例にとる (下図参照)。

時間関数 $f(t)$ で変化する電圧入力に対する電圧出力の時間関数を $y(t)$ とする。

$i = 1, 2, \dots, n$ として入力 $f_i(t)$ に対する出力を $y_i(t)$ とする。このとき

b_i を任意の定数として、入力 $\sum_{i=1}^n b_i f_i(t)$ に対する出力が $\sum_{i=1}^n b_i y_i(t)$ となるならば、

このシステムは線形システムである。

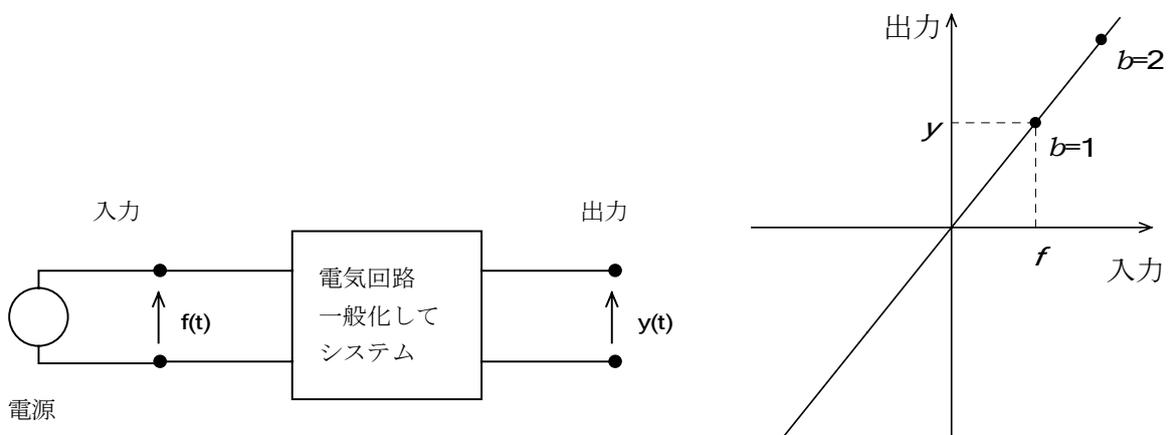
なぜ線形と呼ぶのか? $n=1$ の場合を考える。入力は $b_1 f_1(t)$ 、出力は $b_1 y_1(t)$ となる。定数 b_1 を変化させたとき、任意の時刻 t_1 での入出力振幅の関係をグラフにすると直線になる (下図)。すなわち線形である。どんな実際のシステムが線形システムであるのかは後から説明しよう。

線形システムでは、ある入力 $f(t)$ に対する出力 $y(t)$ を求める目的で、まず $f(t) = \sum_{i=1}^n b_i f_i(t)$

として係数 b_i を決める。その b_i を用いて $y(t) = \sum_{i=1}^n b_i y_i(t)$ を得る。ここで関数 (群) $f_i(t)$ は、

$f_i(t)$ から容易に $y_i(t)$ が求まるような関数が選ばれる。

$f_i(t)$ として三角関数を選んだのがフーリエ (**Fourier**) 級数である。



1 フーリエ級数

周期的な関数 $f(t)$ は三角関数の級数で表すことができ、この級数はフーリエ (Fourier) 級数と呼ばれる。ここでの説明では変数を時間 t とする。ここで説明する考え方は空間座標の関数にも同様に適用できる。

1. 1 周期関数とフーリエ級数

1. 1. 1 周期関数

次式を満たす関数 $f(t)$ は周期関数である。

$$f(t) = f(nT + t) \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (1)$$

ただし T は周期で、この条件を成り立たせる値の最小値とする。

一方、次の関数は周期 T の関数列である。 $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f_0$ とする。

$$1, \cos \omega_0 t, \cos 2\omega_0 t, \dots, \cos n\omega_0 t, \dots \quad \sin \omega_0 t, \sin 2\omega_0 t, \dots, \sin n\omega_0 t, \dots \quad (2)$$

1. 1. 2 フーリエの主張

式(1)の関数 $f(t)$ を三角関数の和として表現する。これを展開するという。

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega_0 t \quad (3)$$

右辺をフーリエ級数という。 $a_n (n = 0, 1, 2, \dots)$, $b_n (n = 1, 2, \dots)$ をフーリエ係数という。

式(3)が成り立つとしてフーリエ係数を求める。

実は、式(3)が成り立つかどうかは大問題である。1822年にフーリエは「周期関数は式(3)の三角級数で表すことができる」と主張した。当時の議論には数学的厳密性は欠けていた。しかし物理や工学の応用にたいへんに役立った。当時は産業革命の時代で、蒸気機関が活躍し、熱伝導問題が重要だった。フーリエは彼の主張に基づいて熱伝導方程式 (付録参照) を解くことに成功した。さらにフーリエの主張は数学の発展に寄与した。そして今では、フーリエの主張が成り立つ関数の範囲 (付録参照) が研究され明らかになっている。

式(3)の両辺に $\cos m\omega_0 t$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) をかけて一周期 T にわたって積分する。被積分関数が周期 T の周期関数 (周期関数の積はやはり同じ周期の周期関数である) なので、積分範囲は任意に選べる。以下で範囲指定を省略した場合は任意の一周期を示す。

注意! フーリエ係数に用いられる積分は不定積分 (時間の関数) ではなく、定積分 (時間の関数ではない) である。積分範囲を省略した積分記号は、不定積分と区別が付かなくなってしまう。本講義では、添え字で周期を示す T を付けて定積分であることを明示する。

$$\int_T f(t) \cos m\omega_0 t dt = \frac{a_0}{2} \int_T \cos m\omega_0 t dt + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_T \cos n\omega_0 t \cos m\omega_0 t dt + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_T \sin n\omega_0 t \cos m\omega_0 t dt$$

右辺は、 $u = \omega_0 t$ と変数変換し、積分範囲を指定すると次になる。

$$\begin{aligned} & \frac{a_0}{2} \frac{1}{\omega_0} \int_{-\pi}^{\pi} \cos m u du + \frac{1}{\omega_0} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos n u \cos m u du + \frac{1}{\omega_0} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin n u \cos m u du \\ & = \frac{a_0}{2} \frac{1}{\omega_0} \int_{-\pi}^{\pi} \cos m u du + \frac{1}{\omega_0} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos n u \cos m u du = \frac{a_0}{2} T \delta_{0m} + \frac{T}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \delta_{nm} \pi = \frac{T}{2} a_m \end{aligned}$$

ここで次の直交性を用いた。 $m, n = 1, 2, 3, \dots$, δ_{nm} はクロネッカーデルタで、 $n=m$ ならば 1、そうでなければ 0 を表す。

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin m x \cos n x dx = 0 \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin m x \sin n x dx = \pi \delta_{nm} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos m x \cos n x dx = \pi \delta_{nm}$$

これより

$$a_n = \frac{2}{T} \int_T f(t) \cos n\omega_0 t dt \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

b_n も同様にして得られ次になる。

$$b_n = \frac{2}{T} \int_T f(t) \sin n\omega_0 t dt \quad (n = 1, 2, \dots)$$

関数 $f(t)$ が偶関数または奇関数のとき、それぞれ $b_n = 0$ または $a_n = 0$ となる。

演習 1.1.1

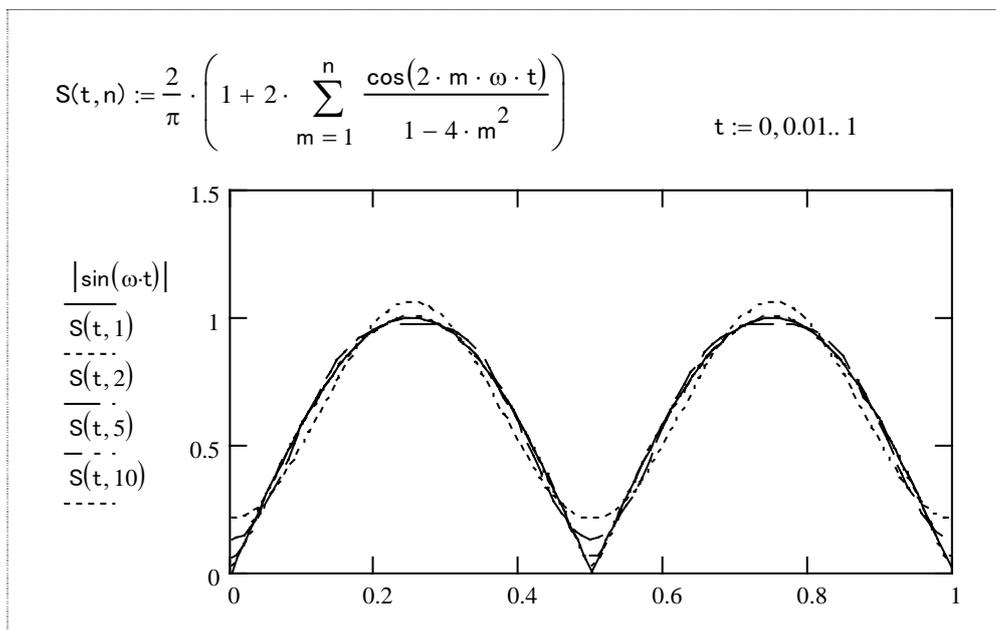
- 1) 三角関数の直交性が成り立つことを確かめよ。
- 2) フーリエ係数 b_n の式を導出せよ。
- 3) 展開係数の式を得るために三角関数の直交性はどのように使われたか。
もし仮に直交性が成り立たなかったらどうなるか考えよ。

1. 1. 3 フーリエ級数の収束 (数値実験)

先の疑問「式(3)が成り立つかどうか」は、言い換えると、「フーリエ級数は和の項数 n を十分に大きくすると、級数の値は収束し、元の関数の値に一致するのか?」となる。ここではこれについて数値実験で調べて、広い範囲の関数について成り立つことを示す。

数値実験 1 (全波整流波形)

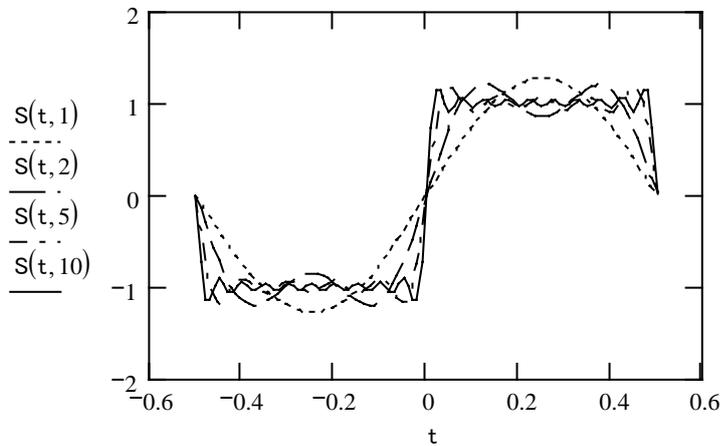
$f(t) = |\sin \omega t|$ からフーリエ係数を求めた結果は $S_n(t) = \frac{2}{\pi} \left(1 + 2 \sum_{m=1}^n \frac{\cos 2m\omega t}{1 - 4m^2} \right)$ である。



実線が元の関数、和をとる項数 n を 1 から 10 まで増加させるにつれて級数が元の波形に近づく。この関数は $t=0, 0.5, 1$ で滑らかになっていない特徴をもつ。滑らかでない部分をもつ関数もフーリエ級数で表すことができることが示された。

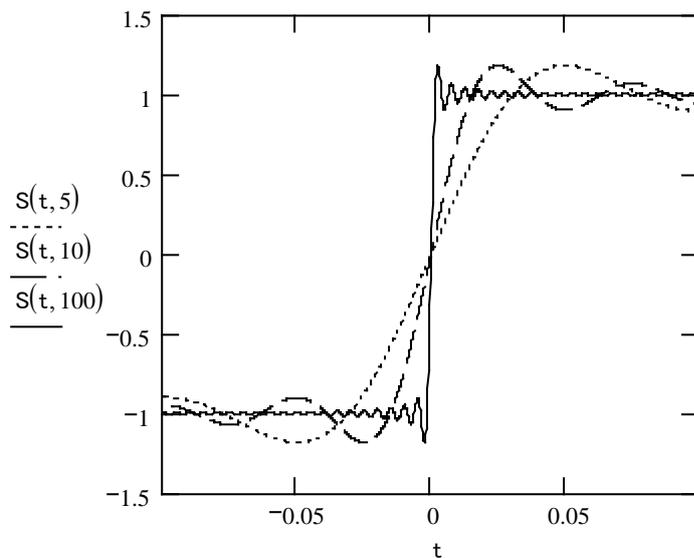
数値実験 2 (矩形パルス)

$$f(t) = \begin{cases} -1 & -\frac{T}{2} \leq t < 0 \\ 1 & 0 \leq t < \frac{T}{2} \end{cases} \quad S_n(t) = \frac{4}{\pi} E \sum_{m=1}^n \frac{\sin(2m-1)\omega t}{2m-1}$$



項数 n を大きくすると元の波形が表現できるように見える。この関数は $t=0, 0.5$ に不連続点をもつのが特徴である。

不連続点 $t=0$ では、フーリエ級数値は、両側からの極限值 $f(0_+)=1$ と $f(0_-)=-1$ の平均値 0 をとることに注目。



よくみると不連続点付近に振動が見える。項数 n を増やしても振動振幅は減少しない。これをギブスが発見し (1899)、ギブスの現象と呼ばれる。フーリエの主張から 77 年後であった。不連続点付近ではフーリエ級数の収束が著しく遅い (多数の項を用いないと元の関数を表現できない)。収束の速さが t の値に依存し、収束は (t に対して) 一様でない。

不連続な関数をフーリエ級数で表すと連続関数になってしまう。不連続点での関数値は両側からの極限値の平均値になる。この違いを除けば、不連続点をもつ関数もフーリエ級数で表すことができる。

以上、数値実験でフーリエ級数が元の関数を表すことを確認した。関数に不連続点がある場合、折れ曲がり点がある場合でも級数展開できている。

1. 1. 4 フーリエ級数の収束 (定理)

フーリエ級数の収束について数学的証明がなされている (参考書を付録の中で挙げた)。工学分野で実際に現れる関数に対しては、収束に関して次の定理で十分である。

定理 (区分的に微分可能な関数の収束定理)

$f(t)$ は区分的に微分可能な周期関数とすると、すべての t でフーリエ級数は収束し、収束値は $\frac{1}{2}(f(t+0) + f(t-0))$ に一致する。

特に t が $f(t)$ が連続な点であれば $f(t)$ に一致する。

証明は付録参照

”区分的に微分可能”とは、ある区間で関数 $f(t)$ が定義されているとき、その区間は有限個の点で小区間に分割されて、各小区間では微分が可能 (連続かつ滑らか) であり、かつ、各小区間の両端点では、その小区間内から端点に近づいたときの極限值が存在し、さらに擬微係数 $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t-\Delta t) - f(t-0)}{-\Delta t}$ または $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t+0)}{\Delta t}$ が存在することをいう。ここで、 $f(t+0)$ は、点 t にプラス側から近づいていったときの関数の極限值。 $f(t-0)$ はマイナス側からの極限值。不連続点では両者は一致しない。

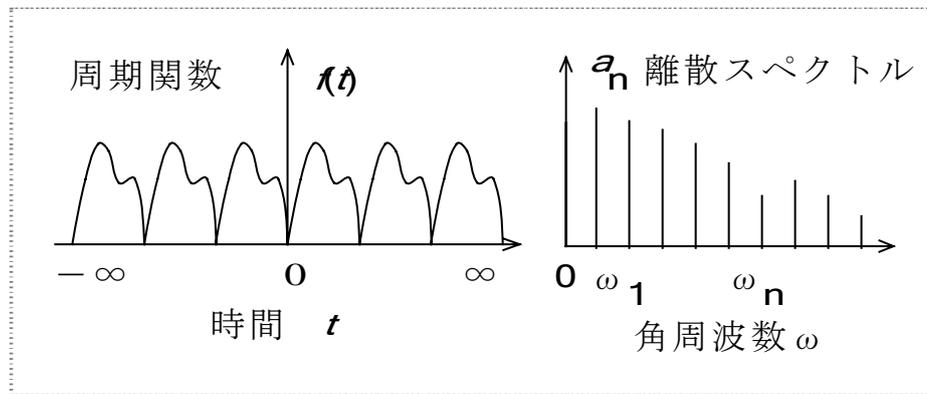
工学で現れる関数は、不連続点や、折れ曲がり点をもつ関数であっても、ほとんどすべてこの定理の条件を満たしており、フーリエ級数は収束すると考えてよい。

1. 1. 5 周期関数と離散スペクトル

$f_0 = \frac{1}{T}$ を基本周波数、 $\omega_0 = 2\pi f_0$ を基本角周波数と呼ぶ。フーリエ級数は、直流および基本角周波数の整数倍の正弦および余弦関数項からなる。

上述のことは、波形は基本角周波数の整数倍の振動成分からなりたっている、とすることができる。 $\omega_n = n\omega_0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) として、角周波数 ω_n ($n \geq 2$) の振動成分を高調波とよぶ。フーリエ係数 a_n および b_n は基本波、高調波のまざり具合を表している。関数に含まれるこれらの波動成分の分布をスペクトルと呼ぶ。

重要な点として、周期関数のスペクトルは離散的である (図参照)。離散角周波数 ω_n の間隔 $\Delta\omega = \omega_{n+1} - \omega_n$ は $\frac{2\pi}{T}$ であり、周期に反比例する。離散値間の連続角周波数成分は含まれない。後述の標本化定理でこの事実を思い出すであろう。



区間 $[0, T]$ だけで非零の値をもつ関数 $f(t)$ は周期関数ではない。このままではフーリエ級数展開できない。フーリエ級数が区間外で非零値をもつからだ。そこで $g(t + mT) = f(t)$ として区間外の値を与え、周期関数に定義しなおせばフーリエ級数展開できる。そして区間 $[0, T]$ に限って使えば元々の関数 $f(t)$ と同一である。この関数のスペクトルは離散的である。

演習 1.1.1 全波整流波形 $|\sin \omega t|$ をフーリエ級数展開せよ。

演習 1.1.2 半波整流波形をフーリエ級数展開せよ。

演習 1.1.3 矩形パルス波形

$$e(t) = \begin{cases} -1 & -\frac{T}{2} \leq t < 0 \\ 1 & 0 \leq t < \frac{T}{2} \end{cases}$$

のフーリエ級数展開が $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{4}{\pi} \frac{1}{2m-1} \sin(2m-1) \frac{2\pi}{T} t$ となることを確かめよ。

演習 1.1.4 $f(t) = t^2$ $0 \leq t < T$ で与えられる周期 T の関数をフーリエ級数展開せよ。

1. 2 複素フーリエ級数

オイラーの公式 $\exp(jx) = \cos x + j \sin x$ を用いて三角関数を複素指数関数で表す。

$$\cos x = \frac{1}{2}(\exp(jx) + \exp(-jx)) \quad \sin x = \frac{1}{2j}(\exp(jx) - \exp(-jx))$$

電気・電子工学では慣例として虚数単位 $\sqrt{-1}$ を j で表す (数学や物理では i)。これを用いてフーリエ級数を複素指数関数で表そう。

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n - jb_n}{2} \exp(jn\omega_0 t) + \frac{a_n + jb_n}{2} \exp(-jn\omega_0 t) \right)$$

a_n, b_n を代入して () 内の係数は次になる。

$$\frac{a_n - jb_n}{2} = \frac{1}{T} \left(\int_T f(t) \cos n\omega_0 t dt - j \int_T f(t) \sin n\omega_0 t dt \right) = \frac{1}{T} \int_T f(t) \exp(-jn\omega_0 t) dt$$

$$\frac{a_n + jb_n}{2} = \frac{1}{T} \int_T f(t) \exp(jn\omega_0 t) dt$$

ここで新たな係数 c_n を次のように定義する。積分範囲は任意にとった一周期である。

$$c_n = \frac{1}{T} \int_T f(t) \exp(-jn\omega_0 t) dt$$

a, b 係数と c 係数との関係は次のようになっている。

$$c_n = \frac{a_n - jb_n}{2} \quad c_{-n} = \frac{a_n + jb_n}{2} \quad a_n = c_n + c_{-n} \quad b_n = j(c_n - c_{-n})$$

これらをフーリエ級数式に代入すると次のフーリエ級数の複素表現を得る。

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \exp(jn\omega_0 t) + c_{-n} \exp(-jn\omega_0 t)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(jn\omega_0 t)$$

関数 f が実関数の場合、 a, b 係数はすべて実数である。そうすると

$$c_{-n} = c_n^*$$

である。ただし*は複素共役の記号である。フーリエ級数は次になる。

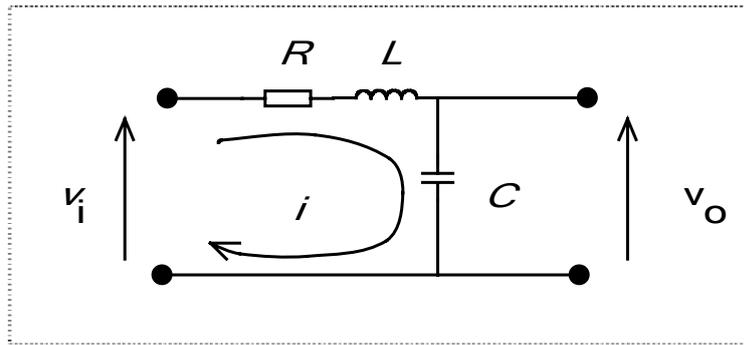
$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \exp(jn\omega_0 t) + c.c.) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} [2c_n \exp(jn\omega_0 t)]$$

ただし、c.c.は前の項の複素共役項を表す。Re[]は実部を取り出すことを表す。

1. 3 回路の周期波形応答

1. 3. 1 LCR 回路が線形システムであること

図の平滑回路を例に用いて説明する。 R は抵抗値、 L はインダクタンス値、 C はキャパシタンス値を表す。左側の二端子に入力電圧 $v_i(t)$ を印加し、右側の二端子の出力電圧を $v_o(t)$ とする。



各素子における電圧と電流の関係は、物理学（電磁気学）により規定される。それに基づき次の微分方程式が成り立つ。

$$v_i(t) = Ri(t) + L \frac{d}{dt} i(t) + v_o(t) \quad i(t) = C \frac{d}{dt} v_o(t)$$

電流を消去して次式を得る。

$$LC \frac{d^2}{dt^2} v_o(t) + RC \frac{d}{dt} v_o(t) + v_o(t) = v_i(t) \quad (1)$$

LCR 回路が線形システム（**0** 参照）であることは次のよう確認される。

入力関数 $v_{im}(t)$ に対する出力関数を $v_{om}(t)$ とする。すなわち、

$$LC \frac{d^2}{dt^2} v_{om}(t) + RC \frac{d}{dt} v_{om}(t) + v_{om}(t) = v_{im}(t) \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \quad (2)$$

$\{b_m\} (m = 1, 2, 3, \dots)$ を任意の係数として $\sum_{m=1}^M b_m v_{im}(t)$ を入力すると $\sum_{m=1}^M b_m v_{om}(t)$ が出力されることを証明できる。

演習 1.3.1 図の LCR 回路が線形システムであることを示せ。

0 線形システムで述べた定義を参照せよ。

1. 3. 2 回路と複素指数関数

cos 関数を入力関数に選ぶと、式(2)の解である出力関数を容易に求めることができる。それを示そう。ただし、ここが重要！、cos 関数をそのままの形では用いないで、次のように複素指数関数の実部として表す。

$$v(t) = \operatorname{Re}[V \exp(j\omega t)] (= |V| \cos(\omega t + \theta) \text{ ただし } \theta = \arg[V])$$

ここで、 V を複素振幅と呼ぶ。複素振幅は cos 関数の振幅と位相の情報を担っている。

式(2)に、 $v_{om}(t) = \operatorname{Re}[V_{om} \exp(j\omega_m t)]$ と $v_{im}(t) = \operatorname{Re}[V_{im} \exp(j\omega_m t)]$ を代入し、移項する。

$$\left(LC \frac{d^2}{dt^2} + RC \frac{d}{dt} + 1 \right) \operatorname{Re}[V_{om} \exp(j\omega_m t)] - \operatorname{Re}[V_{im} \exp(j\omega_m t)] = 0$$

係数はすべて実数。微分演算では実部と虚部の入れ替わりは起こらない。よって実部を採る演算は最後にまわす。

$$\operatorname{Re} \left[\left(LC \frac{d^2}{dt^2} + RC \frac{d}{dt} + 1 \right) V_{om} \exp(j\omega_m t) - V_{im} \exp(j\omega_m t) \right] = 0$$

微分を実行すると次になる。

$$\operatorname{Re} \left[\left(V_{om} (-\omega_m^2 LC + j\omega_m RC + 1) - V_{im} \right) \exp(j\omega_m t) \right] = 0 \quad (3)$$

$\exp(j\omega_m t)$ を微分すると再び $\exp(j\omega_m t)$ になる。これが関数 $\operatorname{Re}[V \exp(j\omega t)]$ を用いた理由である。0 で述べた適切な関数の選択になる。式(3)がいかなる t に対しても成り立つためには次の複素方程式が成り立たなければならない。

$$V_{om} (-\omega_m^2 LC + j\omega_m RC + 1) - V_{im} = 0$$

これを解いて次を得る。

$$\frac{V_{om}}{V_{im}} = K(j\omega_m) \quad K(j\omega_m) = \frac{1}{-\omega_m^2 LC + j\omega_m RC + 1}$$

この最後の結果 $K(j\omega_m)$ は回路の伝達関数と呼ばれる。伝達関数は交流回路の方法 ($j\omega$ の方法)で、上述の微分方程式を経由することなく、回路を見て直接書き下すことができる。

以上をまとめると、 $\operatorname{Re}[V \exp(j\omega t)]$ に対する回路の出力は $\operatorname{Re}[K(j\omega)V \exp(j\omega t)]$ である。

演習 1.3.2 式(3)を導出せよ。級数展開に用いる関数に $\operatorname{Re}[V \exp(j\omega t)]$ を選ばずに cos、sin 関数を用いたらどうなるか考えて答えよ。

1. 3. 3 周期波形に対する回路の応答

回路（線形システム）に周期波形を入力する。周期関数は **1.2** の最後の部分で述べたように、実数関数は次の形のフーリエ級数展開で表される。係数の記号は変えた。

$$v_i(t) = V_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re}[V_n \exp(jn\omega_n t)] \quad (4)$$

$$\text{ただし、 } V_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) dt \quad V_n = \frac{2}{T} \int_T f(t) \exp(-jn\omega_0 t) dt$$

“ $\operatorname{Re}[V \exp(j\omega t)]$ ”に対する出力は $\operatorname{Re}[K(j\omega)V \exp(j\omega t)]$ ”と“線形システム”から、出力は次になる。

$$v_o(t) = K(j0)V_0 + \operatorname{Re}\left[\sum_{n=1}^{\infty} K(jn\omega_n)V_n \exp(jn\omega_n t)\right] \quad (5)$$

この方法を、全波整流波形 $\left|\sin \frac{2\pi}{T} t\right|$ と平滑回路の場合に適用する。

全波整流波形のフーリエ級数展開は **演習 1.1.1** から、

$$v_i(t) = \frac{2}{\pi} + \sum_{m=1}^{\infty} \operatorname{Re}\left[\frac{4}{\pi} \frac{1}{1-4m^2} \exp\left(j2m \frac{2\pi}{T} t\right)\right]$$

よって出力は次になる。 $K(j0) = 1$ をもちいて

$$v_o(t) = \frac{2}{\pi} + \operatorname{Re}\left[\sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1-4m^2 \left(\frac{2\pi\sqrt{LC}}{T}\right)^2 + j2m \left(\frac{2\pi RC}{T}\right)}\right) \left(\frac{4}{\pi} \frac{1}{1-4m^2}\right) \exp\left(j4\pi m \left(\frac{t}{T}\right)\right)\right]$$

規格化時間 X を定義し、規格化したパラメータを定義する。

$$\frac{2\pi\sqrt{LC}}{T} = A \quad \frac{2\pi RC}{T} = B \quad \frac{t}{T} = X$$

数値計算結果を示す。

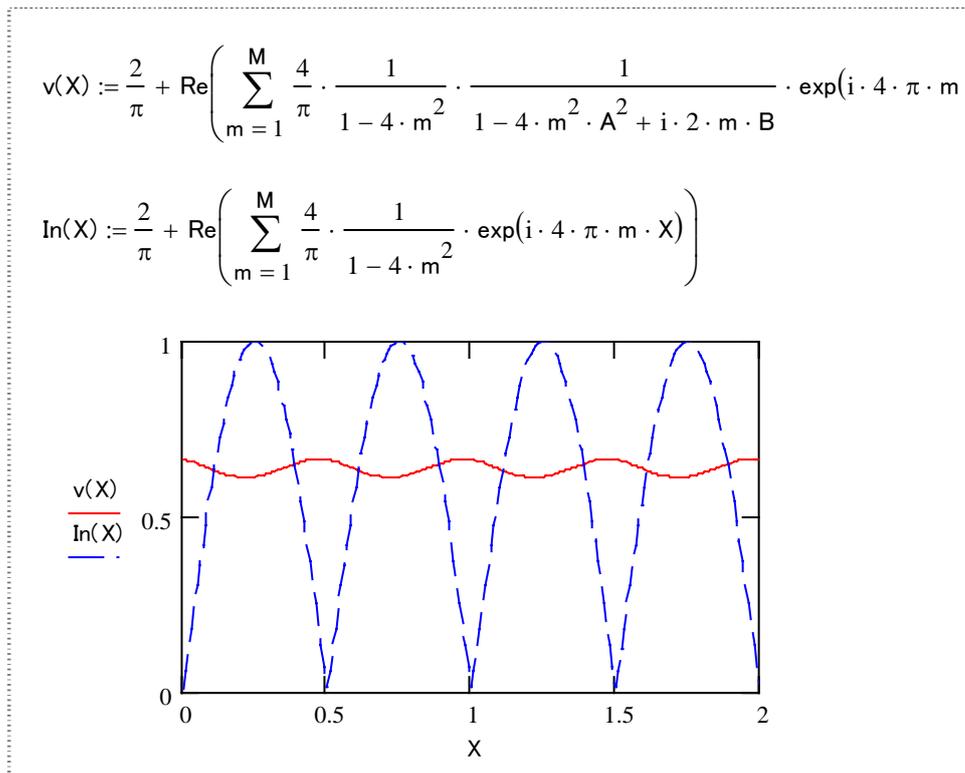
補足 $V_0 = c_0$ $V_n = 2c_n$ 、 $v_i(t)$ が実関数のとき、 $c_{-n} = c_n^*$ これらを用いると

$$v_i(t) = V_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re}[V_n \exp(jn\omega_n t)] \rightarrow v_o(t) = K(j0)V_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re}[K(jn\omega_n)V_n \exp(jn\omega_n t)]$$

の関係が成り立つ。このとき以下の関係も成り立つ。

$$v_i(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(jn\omega_n t) \quad \rightarrow \quad v_o(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n K(jn\omega_n) \exp(jn\omega_n t)$$

$$\therefore \operatorname{Re}[2c_n K(jn\omega_n) \exp(jn\omega_n t)] = c_n K(jn\omega_n) \exp(jn\omega_n t) + c_{-n} K(-jn\omega_n) \exp(-jn\omega_n t)$$



全波整流波形が LCR 回路で平滑化されている。L,C,R の値を増加させると残留リップル振幅は減少する。

演習 1.3.3 半波整流波形が LCR 回路を通過した後の波形を求めよ。数値計算してみよ。全波整流波形の場合との比較を答えよ。

演習 1.3.4 長方形波形が LCR 回路を通過した後の波形を求めよ。数値計算してみよ。波形はどう変化するか答えよ。

演習 1.3.5 任意の周期波形が回路を通過した後の波形を求めることができる。線形性はどこで用いられたか?また複素形式のフーリエ級数展開が便利な理由について答えよ。

解析結果は可視化して確認するとよい。それに用いる数値計算ソフトは様々なものがある。

Mathcad (http://www.iti.iwatsu.co.jp/mathcad/math_value.html 無料体験版有)

以下はフリーソフト。

複素計算も工夫して実行できる

GCalc (<http://homepage3.nifty.com/Sadabo/>)

複素数があるままでは計算できないが実数計算式まで数式誘導をすればグラフ表示できる。

GRAPES (<http://www.osaka-kyoiku.ac.jp/~tomodak/grapes/index.html>)

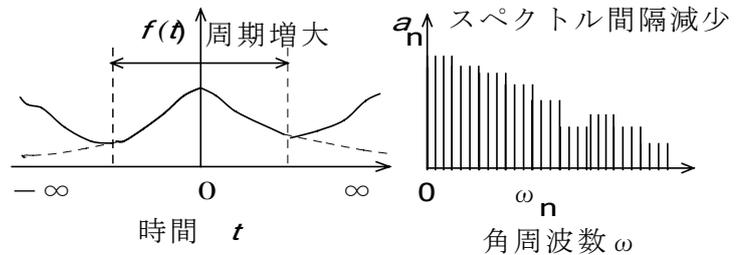
Function View (<http://hp.vector.co.jp/authors/VA017172/>)

2 フーリエ変換

周期関数はフーリエ級数で表された。では非周期的で $-\infty$ から ∞ で定義される関数ほどのようにして表すことができるだろうか。この問題から考えていこう。

2.1 非周期関数とフーリエ変換

周期関数のフーリエ級数展開において、周期を ∞ にすると角周波数間隔は無限小になり、連続スペクトルに移行する。このことを以下で示す。



$f(t)$ は $-\infty < t < \infty$ で定義された関数とする。 T を十分に大きな数として、 $-T/2 \leq t < T/2$ に制限した $f(t)$ を、 $f(t+nT) = f(t)$ で $-\infty < t < \infty$ に周期波形に拡張した関数を $f_T(t)$ とする。今、区間 $-T/2 \leq t < T/2$ を考える。 $\omega_n = n \frac{2\pi}{T}$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

$$\begin{aligned} f(t) &= f_T(t) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_T(t') \exp(-j\omega_n t') dt' \right) \exp(j\omega_n t) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t') \exp(-j\omega_n t') dt' \right) \exp(j\omega_n t) \end{aligned}$$

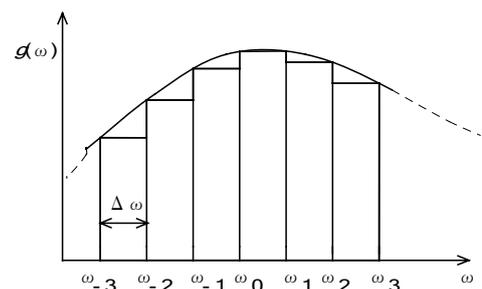
最初の等号は、今、区間 $-T/2 \leq t < T/2$ を考えており、そこでは $f_T(t) = f(t)$ であることによる。次の等号は、 $f_T(t)$ が $-\infty < t < \infty$ で周期関数だからフーリエ級数展開できることによる。そして最後の等号は $f_T(t)$ の定義による。結局、次が成り立つ。

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t') \exp(-j\omega_n t') dt' \right) \exp(j\omega_n t) \quad -T/2 \leq t < T/2$$

$\Delta\omega = \omega_{n+1} - \omega_n = \frac{2\pi}{T}$ とかくと右辺は

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\left(\int_{-T/2}^{T/2} f(t') \exp(-j\omega_n t') dt' \right) \exp(j\omega_n t) \right) \Delta\omega \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(\omega_n) \Delta\omega \end{aligned}$$

となる。図に示すように、和は階段状曲線と横軸の間の面積に等しい。 $\Delta\omega \rightarrow 0$ とすると、曲線と横軸



との間の面積に漸近する。すなわち積分になる。 $\Delta\omega \rightarrow 0$ ($T \rightarrow \infty$) で、

$$\text{右辺} \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t') \exp(-j\omega t') dt' \right) \exp(j\omega t) d\omega \quad \text{となる。}$$

以上により次の式を得る。

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t') \exp(-j\omega t') dt' \right) \exp(j\omega t) d\omega \quad -\infty < t < \infty$$

ここで次のように $F(j\omega)$ を定義する。

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-j\omega t) dt \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) \exp(j\omega t) d\omega$$

$F(j\omega)$ を $f(t)$ のフーリエ変換と呼ぶ。 $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-j\omega t) dt$ を $f(t)$ のフーリエ積分と呼ぶ。

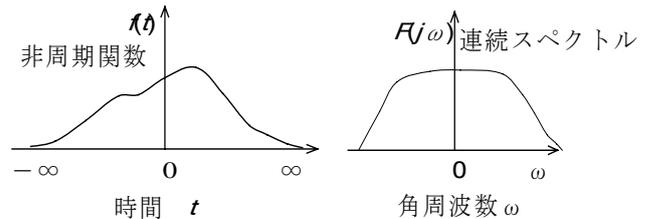
非周期関数 $f(t)$ はそのフーリエ変換 $F(j\omega)$ を用いてフーリエ積分によって表すことができる。

$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) \exp(j\omega t) d\omega$ をフーリエ逆変換と呼ぶ。

$f(t)$ が実関数の場合には $F(-j\omega) = F^*(j\omega)$ である。

フーリエ逆変換の式は、関数 $f(t)$ が様々な角周波数 ω の複素指数関数 $\exp(j\omega t)$ の重ね合

わせから成り立っていることを示す。そして $F(j\omega)$ は角周波数 ω の成分がどれだけ含まれているか、角周波数の分布を表している。そこで $f(t)$ のフーリエ変換 $F(j\omega)$ は、また $f(t)$ のスペクトル密度とも呼ぶ。これは角周波数の連続関数である。すなわち非周期関数のスペクトルは連続である。



$f(t)$ が実関数の場合にはすべて実関数だけで表現することもできる。

$$F(j\omega) = A(\omega) - jB(\omega) \quad A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt \quad B(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt$$

$A(\omega)$ をフーリエ余弦変換、 $B(\omega)$ をフーリエ正弦変換とよぶ。 $f(t)$ が対称関数ならば $B(\omega) = 0$ 、反対称関数ならば $A(\omega) = 0$ である。

$A(-\omega) = A(\omega)$, $B(-\omega) = -B(\omega)$ が成り立つからフーリエ逆変換は次になる。

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) \exp(j\omega t) d\omega - j \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B(\omega) \exp(j\omega t) d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} A(\omega) \cos \omega t d\omega + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} B(\omega) \sin \omega t d\omega \end{aligned}$$

注意! フーリエ変換の定義には次のようなものもあり、そちらもよく使われる。係数と符号とが異なる。公式を用いるときは定義を確認しよう。

(指数形) フーリエ変換 (岩波公式 II など)

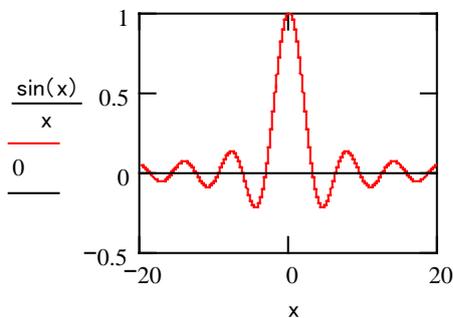
$$F(j\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(j\omega t) dt \quad f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) \exp(-j\omega t) d\omega$$

演習 2.1.1 単一矩形パルスのスペクトルを求め、図示せよ。スペクトルの広がりについて考察せよ。どこまで広がっているか、スペクトルが最大値からその半分まで減少する角周波数幅はいくらか、スペクトルが最初に 0 になるまでの角周波数幅はいくらか、これらの角周波数幅（スペクトル広がり）とパルス幅との積はいくらか、それはパルス幅に依存するか否か、などの観点から考察し、結果を述べよ。

$$f(t) = \begin{cases} E & (|t| \leq a) \\ 0 & (|t| > a) \end{cases}$$

$$F(j\omega) = 2Ea \frac{\sin \omega a}{\omega a}$$

x := -20, -19.99, 20



演習 2.1.2 単一ガウスパルスのスペクトルを求め、図示せよ。ガウスパルスには大きな特徴がある。それは何か？スペクトルの広がりについて考察せよ。どこまで広がっているか、スペクトルが最大値からその半分まで減少する角周波数幅はいくらか、角周波数幅（スペクトル広がり）とパルス幅との積はいくらか、それはパルス幅に依存するか否か、矩形パルスと較べて積の値は大きい小さいか、などの観点から考察し、結果を述べよ。

$$f(t) = E \exp\left(-\left(\frac{2t}{B}\right)^2\right)$$

ヒント 数学公式 $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-at^2) \exp(j\omega t) dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(-\frac{\omega^2}{4a}\right)$ を用いよ。

演習 2.1.3 次の減衰関数のフーリエ変換を求めよ。

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ \exp(-\alpha t) & (t \geq 0) \end{cases} \quad \alpha > 0$$

$$F(j\omega) = \frac{1}{\alpha + j\omega}$$

2. 2 デルタ関数

δ (デルタ) 関数は次の(i)から(iii)の性質をもつ関数として定義される。

$$(i) \quad \delta(x) = \begin{cases} \infty & (x = 0) \\ 0 & (x \neq 0) \end{cases}$$

$$(ii) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

(iii) 任意の関数 $f(x)$ に対して $\int_{-\infty}^{\infty} f(u) \delta(u-x) du = f(x)$ となる。

δ 関数は偶関数 $\delta(-t) = \delta(t)$ である。 δ 関数のフーリエ変換は次のようになる。

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \exp(-j\omega t) dt = \exp(-j\omega 0) = 1$$

すなわちスペクトルは $-\infty$ から ∞ まで無限に広がり、かつその値は ω によらず一定である。

δ 関数は、**演習 2.1.1** で扱った単一矩形パルスの幅 $2a$ と高さ E の積が 1 になるようにして $a \rightarrow 0$ にしたものである。なぜならば定義 (i) から (iii) を満たすからである。

ところで δ 関数は **1.1.4** で述べたフーリエ級数収束の必要十分条件は満たしていない。これは数学的には超関数と呼ばれる。普通とは異なる関数であるが、とても便利な関数でよく使われる。ディラック (Dirac) のデルタ関数と呼ばれるように、物理学者ディラックによって導入された。

演習 2.2.1 スペクトル $F(j\omega) = 1$ を用いてフーリエ逆変換によって

$$\delta(t) = \lim_{g \rightarrow \infty} \frac{\sin gt}{\pi t} \quad \text{となることを導け。}$$

2. 3 フーリエ変換の存在と性質

フーリエ変換の存在: $f(x)$ は $(-\infty, \infty)$ 上で定義された関数で、どんな有限区間 $[a, b]$ でも $f(x)$ が積分可能であるとし ($f(t) \exp(-j\omega t)$ も積分可能)、広義積分 $\lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow \infty}} \int_a^b f(t) \exp(-j\omega t) dt$

が有限値として存在するならばフーリエ変換は存在する。

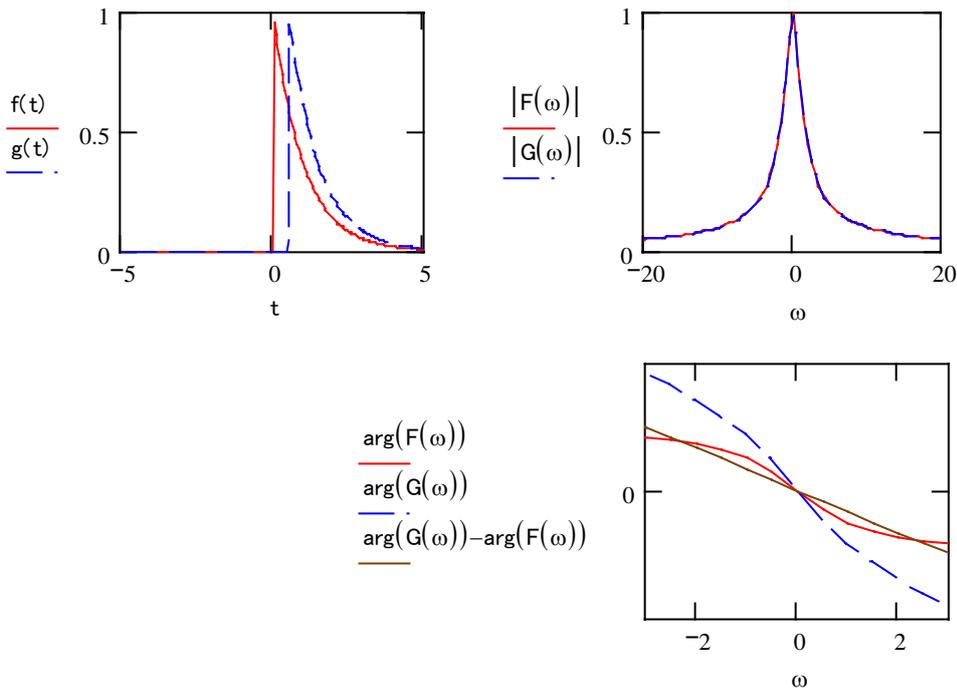
関数 $f(t)$ のフーリエ変換が存在するとして、関数 $f(t)$ をフーリエ変換する操作を $\mathcal{F}[f(t)]$ と書き表すことにする。すなわち、 $\mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-j\omega t) dt = F(j\omega)$

次の関係が成り立つ。

$$(1) \quad \mathcal{F}[\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)] = \alpha \mathcal{F}[f_1(t)] + \beta \mathcal{F}[f_2(t)] \quad \text{線形性}$$

$$(2) \quad \mathcal{F}[f(t - \tau)] = \exp(-j\omega\tau) \mathcal{F}[f(t)] \quad \text{原関数の移動}$$

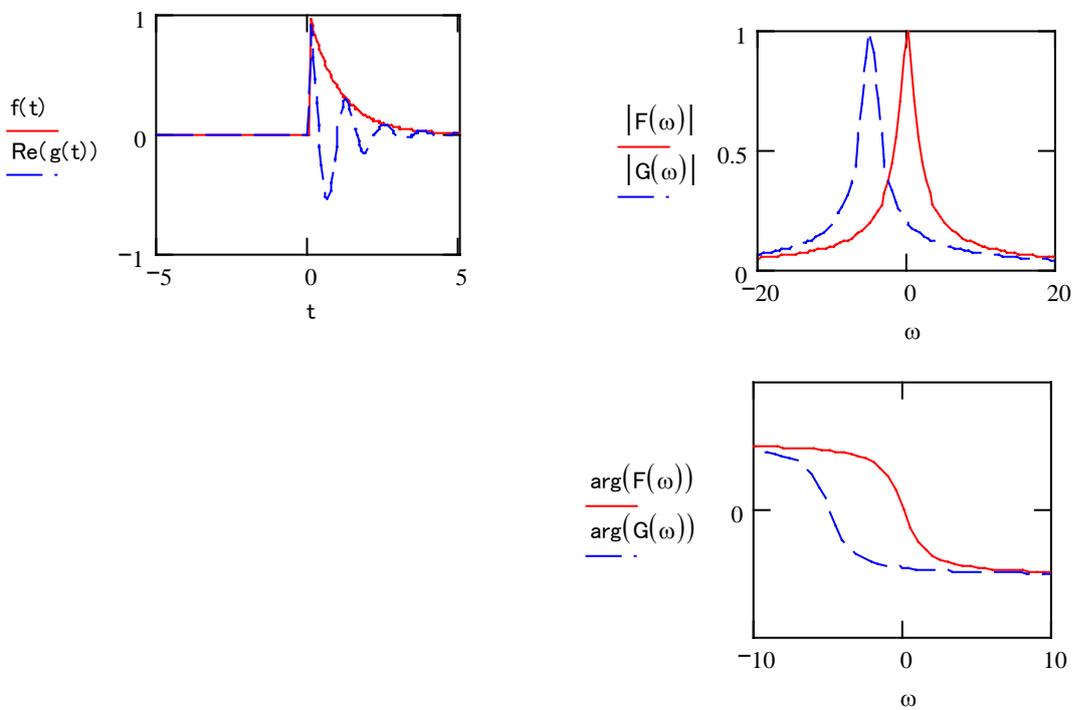
波形を時間軸上で平行移動させると、そのスペクトルは振幅は変化せず、位相は $-\omega\tau$ だけ変化する (位相の変化量は ω に比例する)。



(3) $\mathcal{F}[\exp(-jkt)f(t)] = F(j\omega + jk)$

像関数の移動

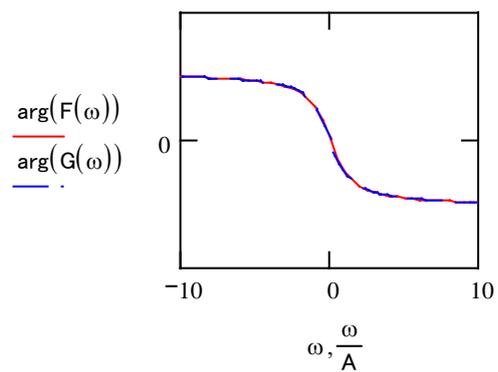
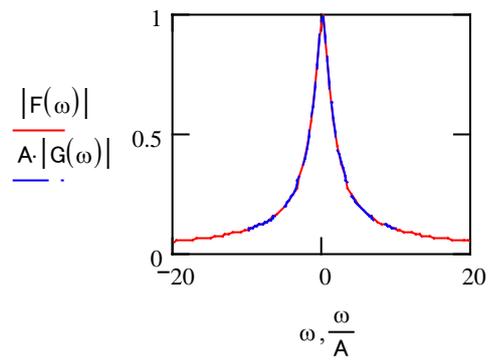
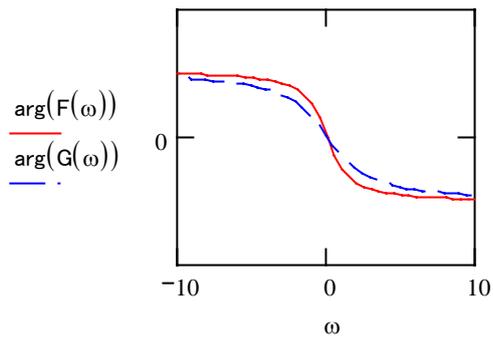
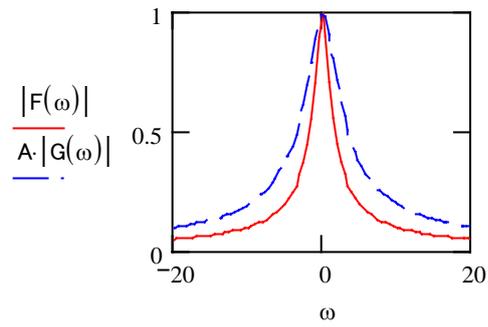
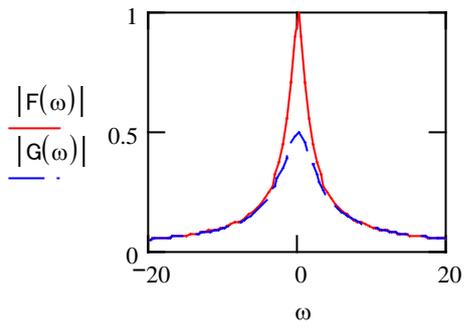
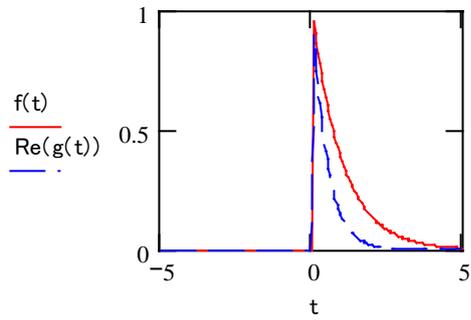
波形と $\exp(-jkt)$ とをかけ算すると ($\exp(-jkt)$ を $f(x)$ で変調すると)、 $f(x)$ のスペクトルは角周波数軸上で $-k$ だけ平行移動する。



$$(4) \mathcal{F}[f(At)] = \frac{1}{A} F\left(\frac{j\omega}{A}\right)$$

時間軸の拡大

ただし $A > 0$ 。時間軸を A 倍すると



$$(5) \mathcal{F}[f^{(n)}(t)] = (j\omega)^n \mathcal{F}[f(t)]$$

時間微分

ただし $\lim_{a \rightarrow -\infty} f^{(i)}(a) = 0$ $\lim_{b \rightarrow \infty} f^{(i)}(b) = 0$ $i = 0, 1, \dots, n-1$ とする。

また $f^{(0)}(t) = f(t)$ である。

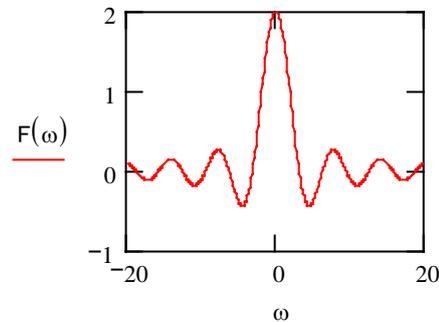
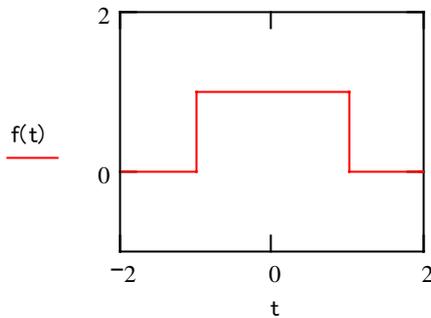
$$(6) \mathcal{F}[F(jt)] = 2\pi f(-\omega)$$

フーリエ変換の双対性。

$$f(t) := \begin{cases} 1 & \text{if } |t| \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad F(\omega) := 2 \cdot \frac{\sin(\omega)}{\omega}$$

t := -2, -1.99..2

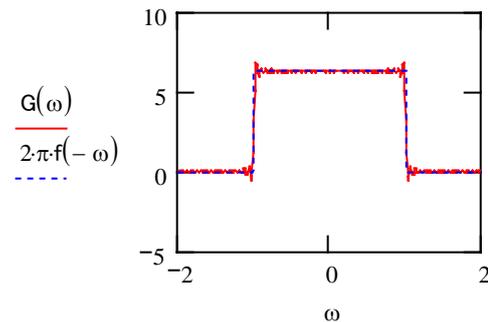
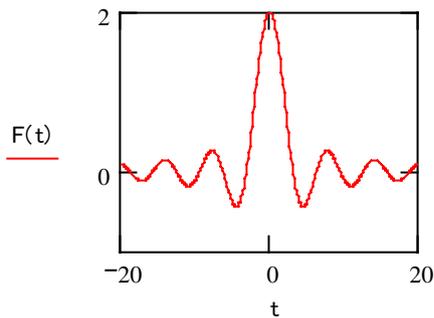
ω := -20, -19.9..20



$$G(\omega) := \int_{-100}^{100} F(t) \cdot \exp(-i \cdot \omega \cdot t) dt$$

t := -20, -19.9..20

ω := -2, -1.99..2



$f(t)$ が偶関数のときは、 $f(t)$ のフーリエ変換をさらにフーリエ変換すると、係数と軸の向きを除いて、元の関数にもどる。

演習 2.3.1 上の関係 (1) から (6) を証明せよ。

2. 4 畳み込み関数とそのフーリエ変換

次のような積分演算を Convolution、畳み込み、という。

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(y)f_2(x-y)dy$$

$f(x)$ を関数 $f_1(x), f_2(x)$ の畳み込み関数と呼び、 $f = f_1 * f_2$ と表す。

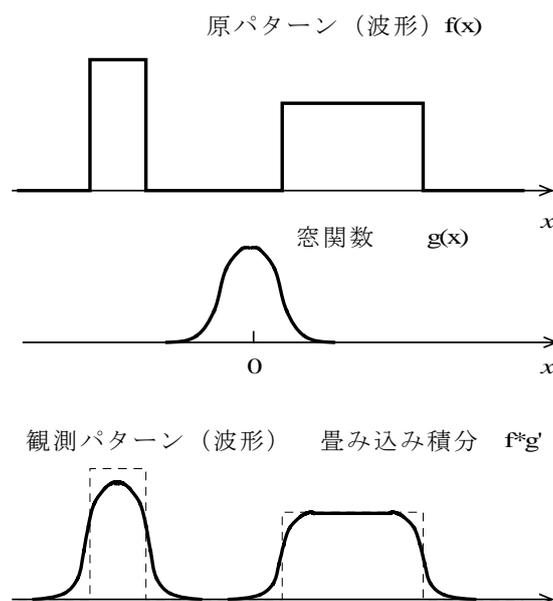
畳み込み関数のフーリエ変換は次のように二つの関数のフーリエ変換の積と等しい。

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_1(y)f_2(x-y)dy \right) \exp(-j\omega x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(y) \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_2(x-y) \exp(-j\omega x) dx \right) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(y) \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_2(u) \exp(-j\omega(u+y)) du \right) dy = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(y) \exp(-j\omega y) dy \int_{-\infty}^{\infty} f_2(u) \exp(-j\omega u) du \\ &= F_1(j\omega)F_2(j\omega) \end{aligned}$$

演習 2.4.1 $\mathcal{F} [f_1(t) f_2(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(j\omega - jy) F_2(jy) dy$ を証明せよ。

なぜこんな積分を定義するのは次の 3.1 で分かるが、その前に別の例を示しておこう。
畳み込み積分の例： $f(x)$ という 1 次元の空間パターンがある。このパターンを写し取るのに有限の空間分解能をもつ検出器を用いたとする。すなわち $g(x)$ という窓関数を定義すると、写し取った後のパターン $h(x)$ は、 $g(x)$ の原点を x に移動した関数 $g(x'-x)$ を $f(x')$ にかけて x' で積分して求められる。すなわち、 $h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x')g(x'-x)dx'$ である。関数 f, g, h の関係

の概念図を示す。変数変換 $u = x - x'$ を行くと $h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-u)g(-u)du = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-u)g'(u)dv$ ただし $g'(u) = g(-u)$ となり、 f と g' との畳み込み積分で表される。



3 時間領域と周波数領域

2で導入したフーリエ変換は、時間領域という”世界”とそれとは別の周波数領域という”世界”の間の行き来を可能にする”手段”である。回路の性質を表現するのに、時間波形を通過させて入力波形と出力波形との関係を記述する仕方がある。これは時間領域での表現法、すなわち時間領域表示である。一方、同じ回路の性質を表すのに、周波数特性を用いる仕方がある。こちらは周波数領域表示ということになる。ここでは、両者について調べ、フーリエ変換が両者を繋いでいることを述べる。

3. 1 時間領域表示と周波数領域表示

関数 $f(t)$ を線形システムに入力したとき出力が $g(t)$ になるとする。出力 $g(t)$ は入力 $f(t)$ の”関数”である。線形システムとは、ある関数を入力すると別の関数が出力される関数の”関数”である。この”関数”を表現する仕方、すなわちシステムを表現する仕方、について考える。時間的に不変な線形システムを対象にしよう。

”入力 $f(t)$ に対する出力が $g(t)$ であるならば、任意の時間 τ に対して、入力 $f(t+\tau)$ に対する出力は $g(t+\tau)$ である”が成り立つならばこのシステムは時間的に不変（時不変）であるという。

0 で述べたように、”入力 $f_i(t)$ に対する出力が $g_i(t)$ のとき、任意の定数を b_i として、

$\sum_i b_i f_i(t)$ に対する出力は $\sum_i b_i g_i(t)$ である”が成り立つならばこのシステムは線形である。

時間的に不変な線形システムとは、上の時不変性と線形性の両性質をもつシステムである。

まず δ 関数を用いてシステムを表してみよう。入力 $\delta(t)$ に対する出力を $k(t)$ とする。 $k(t)$ をインパルスレスポンスと呼ぶ。2.2 で述べた定義により

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(\tau - t) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$

である。二番目の等式では $\delta(t)$ が偶関数であることを用いた。この式は、様々な時刻 τ に生じるインパルスを、それぞれ振幅 $f(\tau)$ で加算した波形は入力波形に等しくなることを示す。時不変性から $\delta(t - \tau)$ に対する出力は $k(t - \tau)$ である。積分は連続的な和と見なすことができ、離散的な和について成り立った線形性の性質は、連続的な和である積分についても成り立つから*

$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$ に対する出力は

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) k(t - \tau) d\tau \quad (1)$$

である。入力 $f(t)$ に対して出力 $g(t)$ がどう決まるかという”関数”の時間領域表示である。これは 2.4 で述べた畳み込み積分である。

*補足説明： $\sum_i b_i f_i(t)$ において $f_i(t) = \delta(t - i\Delta t)$ 、 $b_i = f(i\Delta t) \Delta t$ とすると、

$$f(t) = \sum_i b_i f_i(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f(i\Delta t) \delta(t - i\Delta t) \Delta t \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$

$$g(t) = \sum_i b_i k_i(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f(i\Delta t) k(t - i\Delta t) \Delta t \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) k(t - \tau) d\tau$$

以上をまとめると、時間的に不変な線形システムの出力波形 $g(t)$ は入力波形 $f(t)$ とインパルスレスポンス $k(t)$ の畳み込み関数となる。線形システムの特性情報はインパルスレスポンス $k(t)$ にすべて含まれる。 $k(t)$ はシステムの特性を時間領域表示である。

時間領域表示式(1)の両辺をフーリエ変換する。 $g(t)$ 、 $f(t)$ そして $k(t)$ のフーリエ変換、スペクトル密度、をそれぞれ $G(j\omega)$ 、 $F(j\omega)$ そして $K(j\omega)$ とすると、**2.4**で導いたように、

$$G(j\omega) = K(j\omega)F(j\omega) \quad (2)$$

となる。入力 $F(j\omega)$ に対して出力 $G(j\omega)$ がどう決まるかという"関数"の周波数領域表示である。 $K(j\omega)$ はシステムの伝達関数と呼ばれる。このように周波数領域表現では、スペクトル密度を用いて入出力の関係を表現し、入りに伝達関数をかけるだけで出力が得られる。時間領域表示で要求される畳み込みが、周波数領域表示を用いると単なるかけ算になり、簡単になる。ということはシステムの特性が考え易くなる。

フーリエ変換の定義から

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) \exp(j\omega t) d\omega \quad g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(j\omega)F(j\omega) \exp(j\omega t) d\omega$$

である。両式は” $\exp(j\omega t)$ を入力したときの出力が $K(j\omega) \exp(j\omega t)$ である”ことを示している。これは **1.3** で回路の応答を求めるときに使った考え方である。

回路や伝送路の伝達関数 $K(j\omega)$ は周波数特性とも呼ばれる。入力と出力との関係を周波数領域表示する重要な概念である。線形システムの特性情報はすべて伝達関数 $K(j\omega)$ に含まれる。上述のように伝達関数 $K(j\omega)$ はインパルスレスポンス $k(t)$ のフーリエ変換である。

我々は時間軸上の波形について、時間領域で考えることも、周波数領域で考えることもできる。両領域を行き来するのに使われるのがフーリエ変換、逆変換である。

時不変線形システムについて成り立つ関係式をまとめて示す。

| 時間領域表示 | 周波数領域表示 |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\delta(t)$ に対する波形応答 (インパルス応答) $k(t)$ $\exp(j\omega t)$ に対する応答 (定常応答) $K(j\omega) \exp(j\omega t)$ $f(t)$ に対する波形応答 $g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) k(t - \tau) d\tau$ | $K(j\omega)$ 伝達関数 $F(j\omega)$ に対するスペクトル応答 $G(j\omega) = K(j\omega)F(j\omega)$ |
| 表示間の変換 (フーリエ変換 逆変換) | $F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-j\omega t) dt$ $G(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \exp(-j\omega t) dt$ $K(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} k(t) \exp(-j\omega t) dt$ |

3. 2 時間波形と周波数スペクトルとの双対性

時間関数 $f(t)$ をフーリエ変換するとスペクトル密度 $F(j\omega)$ が得られる。 ω にかかるマイナス符号と係数の影響を除いて、スペクトル密度 $F(j\omega)$ をフーリエ変換すると時間関数 $f(t)$ が得られる（フーリエ変換および逆変換式を見よ）。このことにより時間領域と周波数領域の間には双対関係が存在する。双対例を挙げよう。

事実1 「時間軸上の1点 t_1 で非零の値をもつ関数は δ 関数 $\delta(t - t_1)$ で、周波数軸上では $-\infty$ から ∞ まで振幅1で振動する関数 $\exp(-jt_1\omega)$ である」。

一方、

事実2 「周波数軸上の1点 ω_1 で非零の値をもつ関数は δ 関数 $\delta(\omega - \omega_1)$ で、時間軸上では $-\infty$ から ∞ まで振幅1で振動する関数 $\frac{1}{2\pi} \exp(j\omega_1 t)$ である」。

事実1 と事実2 とは双対の関係にある。

演習 3.2.1 周波数軸上で区間 $[-\omega_c, \omega_c]$ でスペクトル密度が一定の $F(j\omega)$ をもつ関数の時間軸上での波形を求めよ。次に時間軸上の単一矩形パルスのスペクトル密度（演習 2.1.1）と比較せよ。

3.3 パーセバルの等式

$f(t)$ のフーリエ変換を $F(j\omega)$ とするとき、次のパーセバルの等式が成り立つ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$$

証明

2.1 で導いた関係 $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) \exp(j\omega t) d\omega$ から次が成り立つ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) \exp(j\omega t) d\omega \right|^2 dt$$

$$\begin{aligned} \text{RHS} &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) \exp(j\omega t) d\omega \int_{-\infty}^{\infty} F^*(j\omega') \exp(-j\omega' t) d\omega' dt \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) F^*(j\omega') \left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp(j(\omega - \omega')t) dt \right) d\omega' d\omega \end{aligned}$$

ところで

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(j(\omega - \omega')t) dt = \lim_{g \rightarrow \infty} \int_{-g}^g \exp(j(\omega - \omega')t) dt = \lim_{g \rightarrow \infty} 2 \frac{\sin g(\omega - \omega')}{\omega - \omega'}$$

ここで **演習 2.2.1** で導いた $\delta(t) = \lim_{g \rightarrow \infty} \frac{\sin gt}{\pi t}$ を用いる。

$$\begin{aligned} \text{RHS} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) F^*(j\omega') \delta(\omega - \omega') d\omega' d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F^*(j\omega') \left(\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) \delta(\omega - \omega') d\omega \right) d\omega' = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F^*(j\omega') F(j\omega') d\omega' \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega')|^2 d\omega' \end{aligned}$$

よって $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega')|^2 d\omega'$ 証明終わり。

フーリエ級数についても同様にパーセバルの等式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \int_T |f(t)|^2 dt &= \int_T \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(jn\omega_0 t) \right|^2 dt \\ &= \int_T \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^* \exp(-jn\omega_0 t) \right) \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \exp(jm\omega_0 t) \right) dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_n^* c_m \int_T \exp(j(m-n)\omega_0 t) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_n^* c_m T \delta_{nm} = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \end{aligned}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{T} \int_T |f(t)|^2 dt$$

3.4 シャノンの標本化定理

”周波数帯域幅が f_c に制限されている時間関数をサンプリングして離散的信号を得るのに、 $2f_c$ 以上の周波数でサンプリングすれば、この離散的信号から元の時間関数を再現できる”。これはシャノンの標本化定理と呼ばれる。

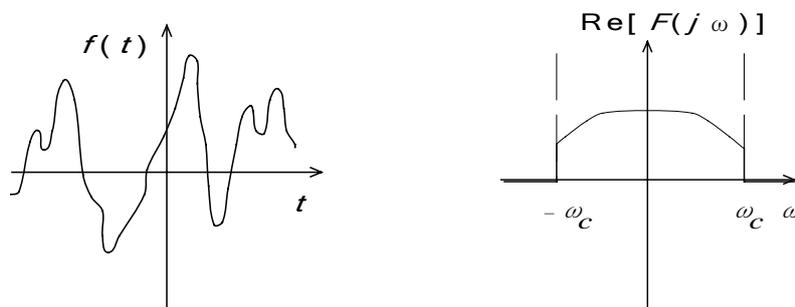
周波数帯域幅が f_c に制限されている関数 $f(t)$ とは、フーリエ変換すなわちスペクトル関数 $F(j\omega)$ が領域 $-\omega_c \leq \omega < \omega_c$ ($\omega_c = 2\pi f_c$) の外では零である関数である (図参照)。

ここで思いだそう。時間軸上の有限区間で定義された時間関数 $f(t)$ を周期的に拡張して $-\infty < t < \infty$ で定義すると、これに対応するスペクトル $F(j\omega)$ は離散的になった (1.1)。そして時間関数と周波数スペクトルとの間には双対性があった (3.2)。ならば・・・

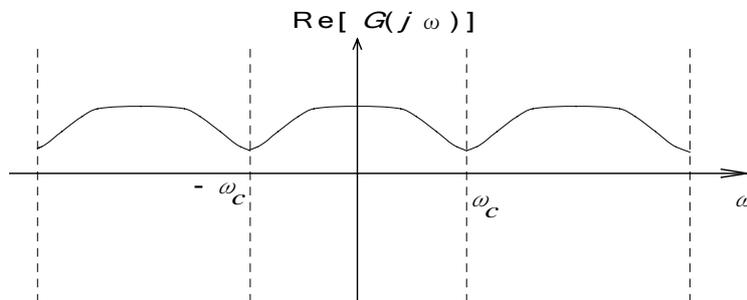
周波数軸上の有限区間 $-\omega_c \leq \omega < \omega_c$ の外側は零であるスペクトル密度関数 $F(j\omega)$ を周期的に拡張して $-\infty < \omega < \infty$ で定義すると、これに対応する時間関数は離散的な時刻でのみ値をもつ。標本化定理が言っていることに近づいてきた。もう少し詳しく調べよう。

$f(t)$ のスペクトル密度 $F(j\omega)$ が $F(j\omega) = 0 \quad |\omega| \geq \omega_c$ であるならば (図)、

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) \exp(j\omega t) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} F(j\omega) \exp(j\omega t) d\omega \quad \text{である。}$$



区間 $-\omega_c \leq \omega < \omega_c$ の $F(j\omega)$ を周期的に繰り返してスペクトル密度 $G(j\omega)$ を $-\infty < \omega < \infty$ で定義する (図)。すなわち $G(j\omega + j2n\omega_c) = F(j\omega) \quad -\omega_c \leq \omega < \omega_c$



$G(j\omega)$ は周期関数であるからフーリエ級数で表すことができる。

$$G(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(jn \frac{\pi}{\omega_c} \omega\right) \quad (1)$$

展開係数は、周期が $2\omega_c$ であることに注意すると、次で与えられる。

$$c_n = \frac{1}{2\omega_c} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} G(j\omega) \exp\left(-jn \frac{\pi}{\omega_c} \omega\right) d\omega = \frac{1}{2\omega_c} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} F(j\omega) \exp\left(-jn \frac{\pi}{\omega_c} \omega\right) d\omega = \frac{\pi}{\omega_c} f\left(-\frac{n\pi}{\omega_c}\right) \quad (2)$$

さて式(2)は、離散時刻 $t_n = -\frac{n\pi}{\omega_c}$ における $f(t)$ の値だけで（離散時刻の間の連続的な時刻での値は使わずに）スペクトル密度 $G(j\omega)$ が決まる、と言っている。これはさらに次のことを意味する。 $G(j\omega)$ から区間 $-\omega_c \leq \omega < \omega_c$ だけを取り出し、それ以外で 0 として $F(j\omega)$ を求めることができ、それをフーリエ逆変換して $f(t)$ が得られる。結局、離散時刻の値を与えただけで、それらの間の連続的な時刻での値も決まる。定理の本質は証明された。

以下では、離散時刻の値だけから、連続的な時刻の値が決まる様子を説明する。まず $G(j\omega)$ に対応する時間関数 $g(t)$ は $g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(j\omega) \exp(j\omega t) d\omega$ で与えられ次となる。

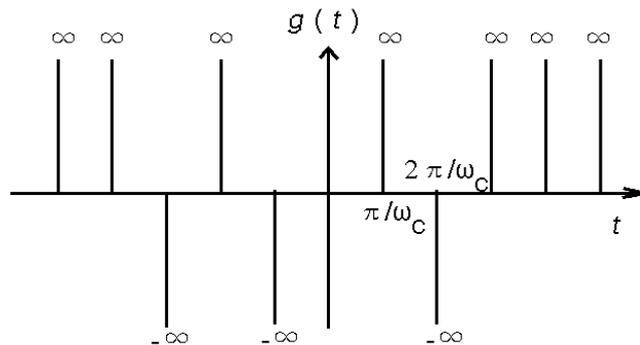
$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{\omega_c} f\left(-\frac{n\pi}{\omega_c}\right) \exp\left(jn \frac{\pi}{\omega_c} \omega\right) \right) \exp(j\omega t) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{\omega_c} f\left(-\frac{n\pi}{\omega_c}\right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(jn \frac{\pi}{\omega_c} \omega\right) \exp(j\omega t) d\omega \right) \end{aligned}$$

() 内の ω 積分は次のようになる。

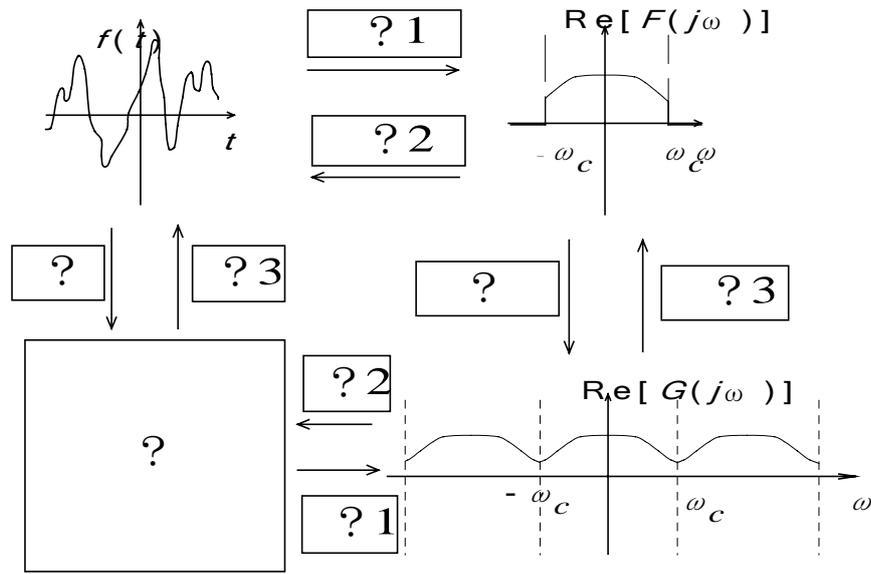
$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(jn \frac{\pi}{\omega_c} \omega\right) \exp(j\omega t) d\omega = \lim_{q \rightarrow \infty} 2 \frac{\sin\left(q \left(n \frac{\pi}{\omega_c} + t\right)\right)}{\left(n \frac{\pi}{\omega_c} + t\right)} = 2\pi \delta\left(n \frac{\pi}{\omega_c} + t\right)$$

よって $g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{\omega_c} f\left(-\frac{n\pi}{\omega_c}\right) \delta\left(t + n \frac{\pi}{\omega_c}\right) = \frac{\pi}{\omega_c} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n\pi}{\omega_c}\right) \delta\left(t - n \frac{\pi}{\omega_c}\right)$

$g(t)$ は δ 関数 $\delta\left(t - \frac{n\pi}{\omega_c}\right)$ の和、すなわち時刻 $t_n = \frac{n\pi}{\omega_c}$ でのみ非零の値をもつ時間関数である。



演習 3.4.0 以下の図を眺めて、?部分に適切な言葉、式あるいは図を入れながら、この図の集まりが意味することを考えよ。標本化定理の理解を助けるために。



スペクトル密度 $G(j\omega)$ に次の窓関数 $W(j\omega)$ をかけると、スペクトル密度 $F(j\omega)$ を得る。

$$\text{すなわち } F(j\omega) = G(j\omega)W(j\omega) \quad \text{ただし } W(j\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

スペクトル密度が二つの関数の積になるならば時間波形は対応する時間波形の畳み込み関数になる。この性質を用いると $f(t)$ の表現式 $f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)w(t-\tau)d\tau$ が得られる。

ここに $w(t)$ は $W(j\omega)$ のフーリエ逆変換で次で与えられる。

$$w(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(j\omega) \exp(j\omega t) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \exp(j\omega t) d\omega = \frac{1}{\pi} \frac{\sin(\omega_c t)}{t}$$

これと、上で求めた $g(t)$ を代入すると、

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{\omega_c} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n\pi}{\omega_c}\right) \delta\left(\tau - n\frac{\pi}{\omega_c}\right) \left(\frac{1}{\pi} \frac{\sin(\omega_c(t-\tau))}{t-\tau}\right) d\tau \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n\pi}{\omega_c}\right) \frac{\sin\left(\omega_c\left(t - \frac{n\pi}{\omega_c}\right)\right)}{\omega_c\left(t - \frac{n\pi}{\omega_c}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n\pi}{\omega_c}\right) Sa\left(\omega_c\left(t - \frac{n\pi}{\omega_c}\right)\right) \end{aligned} \quad (3)$$

ここに関数 $Sa(x)$ は、 $Sa(x) = \frac{\sin x}{x}$ と定義され、標本化関数と呼ばれる。標本化関数は、演習 3.2.1 で調べた（上にも述べた）ように、窓関数のフーリエ変換である。最後の式は

関数のサンプリング点だけを用いた表し方を与えている。

元々の波形 $f(t)$ を表すには、連続値すべてを知る必要はなく、とびとびの時刻でのサン

プリング値 $f\left(n \frac{\pi}{\omega_c}\right) = f\left(\frac{n}{2f_c}\right)$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) のみで十分である。時間波形 $f(t)$ がもつ情

報を失わないための、最低のサンプリング周波数は $2f_c$ である。あるいはサンプリング間隔の上限は $\frac{1}{2f_c}$ である。

標本化定理の意味するところは大きい。これによって時間的に連続な波形に含まれる情報量を定義することができる。また時間的に連続な波形を離散時刻での値のみ用いてデジタル信号処理することの妥当性の根拠を与える。

数値実験をやってみよう。

$$sa(x) := \frac{\sin(x)}{x}$$

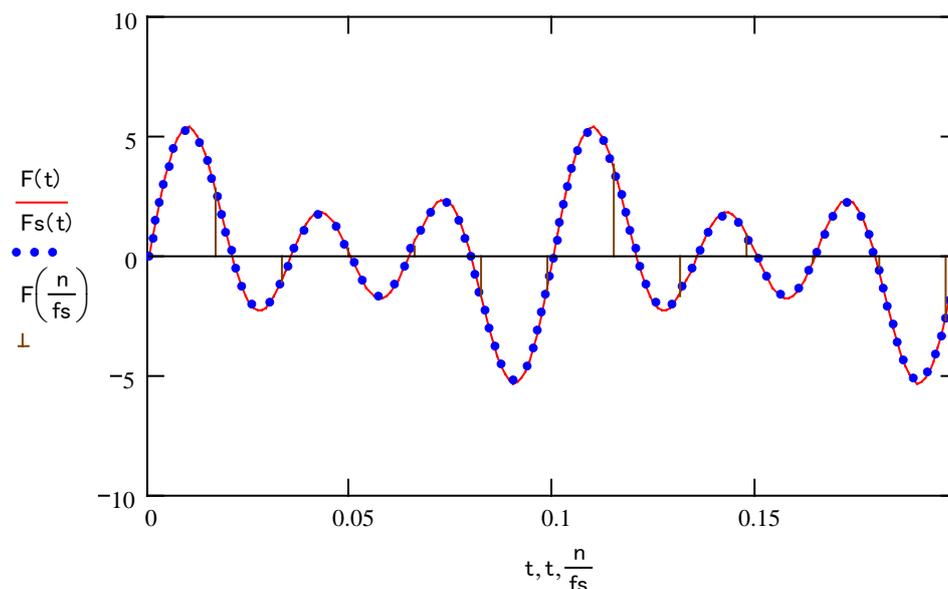
$$a1 := 1 \quad a2 := 2 \quad a3 := 3 \quad f1 := 10 \quad f2 := 20 \quad f3 := 30$$

$$fs := 61$$

$$F(t) := a1 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f1 \cdot t) + a2 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f2 \cdot t) + a3 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f3 \cdot t)$$

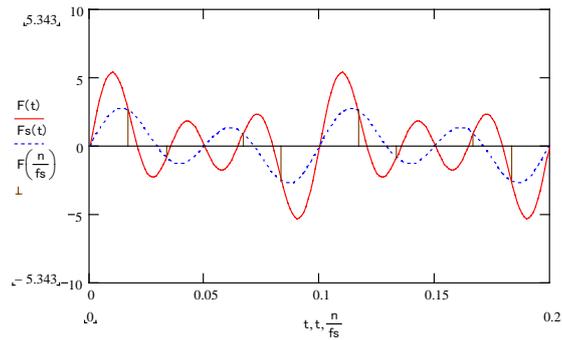
$$Fs(t) := \sum_{n=-100}^{100} F\left(n \cdot \frac{1}{fs}\right) \cdot sa\left[\pi \cdot fs \cdot \left(t - \frac{n}{fs}\right)\right]$$

$$t := 0, 0.001.. 0.2 \quad n := 0.. 100$$

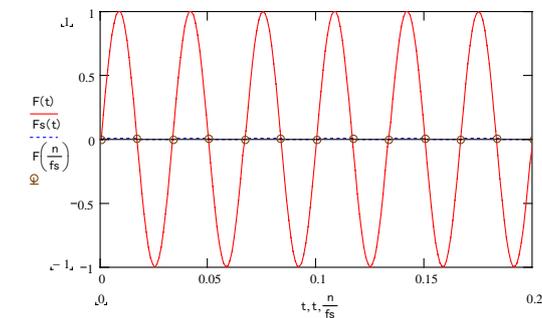


この数値実験では 10,20,30Hz の正弦波を加算した波形を採り上げた。サンプリング周波数を 61Hz にしたところ元の波形を再現できた。しかし周波数の上限値は 30Hz である。

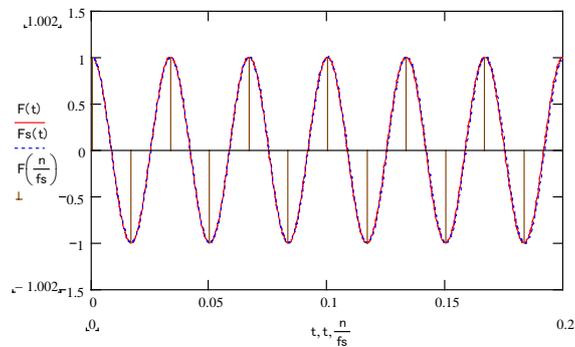
サンプリング周波数はその丁度2倍の **60Hz** でよいはずだ。fs=60 としてみると下のよう
 になった。元の波形が再現できない。これはどうしたことだろう。



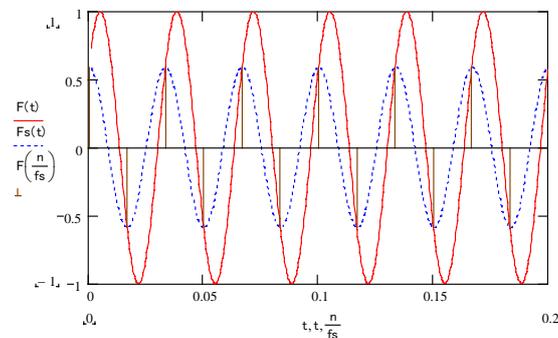
どうやら **30Hz** の波形が抜けてしまったようだ。そこで **30Hz** の波形だけでサンプリング、
 再現実験してみたところ・・・



サンプリング点は丁度零のところばかりである。これでは正しく **30Hz** の正弦波を再現で
 きない。一方、サンプリング点の位置を $\pi/2$ だけずらすと、同じサンプリング間隔でも・・・



再現ができる場合がある。一般の位置では・・・



再現できない。このように上限周波数値 f_c に δ 関数的（離散的）にスペクトル成分が存在
 する場合は、サンプリング周波数は $2f_c$ では不十分で、これよりも大きな値にする必要が

ある。この例は境界線上にスペクトル密度が集中した特別な場合であって連続スペクトル密度の場合とは異なる。

演習 3.4.1 式(3)に標本点 $t = \frac{n\pi}{\omega_c}$ $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ を代入してみよ。標本点で等号が成り立つことを確かめよ。

演習 3.4.2 式(3)によると標本点以外の時刻の関数値は、厳密には、 $-\infty < t < \infty$ のすべての標本点の値に依存していることを確かめよ。

演習 3.4.3 標本化関数 Sa の概略を描け。それを用いて $f\left(\frac{n}{2f_c}\right)$ を適当に与えて、式(3)をグラフに描け。

演習 3.4.4 この節の最初に述べた”周波数帯域幅が f_c に制限されているアナログ波形をサンプリングして離散的信号を得るのに、 $2f_c$ 以上の周波数でサンプリングすれば、この離散的信号から元の波形を再現できる”について、丁度 $2f_c$ の周波数でサンプリングすると再現できることは確かめられた。では $2f_c$ 以上の周波数でサンプリングしたときは本当に再現できるのか、それはどうしてか述べよ。また、 $2f_c$ 以下の周波数でサンプリングしたときは再現できないのか、それはどうしてか述べよ。

通信で扱われる時間関数は情報を担った信号である。信号には、連続（アナログ）信号と離散（デジタル）信号、周期信号と非周期信号がある。そしてこれらのスペクトルにも、連続スペクトルと離散スペクトル、周期スペクトルと非周期スペクトルがある。信号とスペクトルの間には、これまでに述べてきたように、以下の関係が存在する。

- (1) 周期信号 \longleftrightarrow 離散スペクトル **1.1 参照**
- (2) 非周期信号 \longleftrightarrow 連続スペクトル **2.1 参照**
- (3) 離散信号 \longleftrightarrow 周期スペクトル (1) の双対
- (4) 連続信号 \longleftrightarrow 非周期スペクトル (2) の双対

連続周期信号は離散非周期スペクトルをもつ。両者の関係を結ぶのがフーリエ級数展開である。連続非周期信号は連続非周期スペクトルをもつ。両者を結ぶのがフーリエ変換である。離散周期信号は離散周期スペクトルをもつ。両者を結ぶのが **4** に述べる離散フーリエ変換である。

3. 5 回路の波形応答と周波数応答

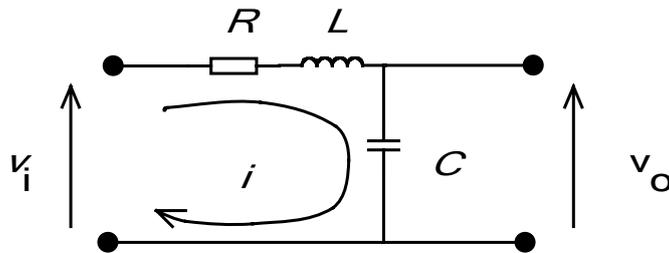
入力信号の周波数スペクトル

1.3 では周期波形の回路応答をフーリエ級数展開を用いて求めた。今度は周期波形ではなくて非周期波形（孤立波形）を入力した場合を調べる。 $f(t)$ は **2.1** で述べたようにフーリエ積分で表される。 $f(t)$ が実関数の場合には $F(-j\omega) = F^*(j\omega)$ であるからフーリエ積分は次のように $0 \sim \infty$ の範囲だけになる。

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} F^*(j\omega) \exp(-j\omega t) d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} F(j\omega) \exp(j\omega t) d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re}[F(j\omega) \exp(j\omega t)] d\omega \end{aligned} \quad (1)$$

ここで $F(j\omega)$ は入力波形のスペクトル密度である。入力波形にどんな周波数成分がどんな割合で含まれるかの周波数分布を示している。

前と同じ平滑回路（下図）を例に用いよう。



角周波数 ω が連続値をとる場合にも、離散値の場合 (**1.3**) と同様、 $\operatorname{Re}[F(j\omega) \exp(j\omega t)]$

に対する応答は $\operatorname{Re}[K(j\omega) F(j\omega) \exp(j\omega t)]$ となる。

出力信号の周波数スペクトル

$K(j\omega) F(j\omega)$ は出力波形のスペクトル密度である。出力波形にどんな周波数成分がどんな割合で含まれるかの周波数分布を示している。

回路の周波数特性

$K(j\omega)$ は回路が高周波を通しやすいのか、低周波を通しやすいのか、など周波数依存性を示しており、周波数特性を表す。 $|K(j\omega)|$ は振幅特性、 $\arg[K(j\omega)]$ は位相特性を示す。

回路の出力波形

出力波形を得るには、 $\operatorname{Re}[K(j\omega) F(j\omega) \exp(j\omega t)]$ をフーリエ逆変換すればよい。

数値計算

上の平滑回路の伝達関数 $K(j\omega) = \frac{1}{-\omega^2 LC + j\omega RC + 1}$ を用い、単一矩形パルスのスペ

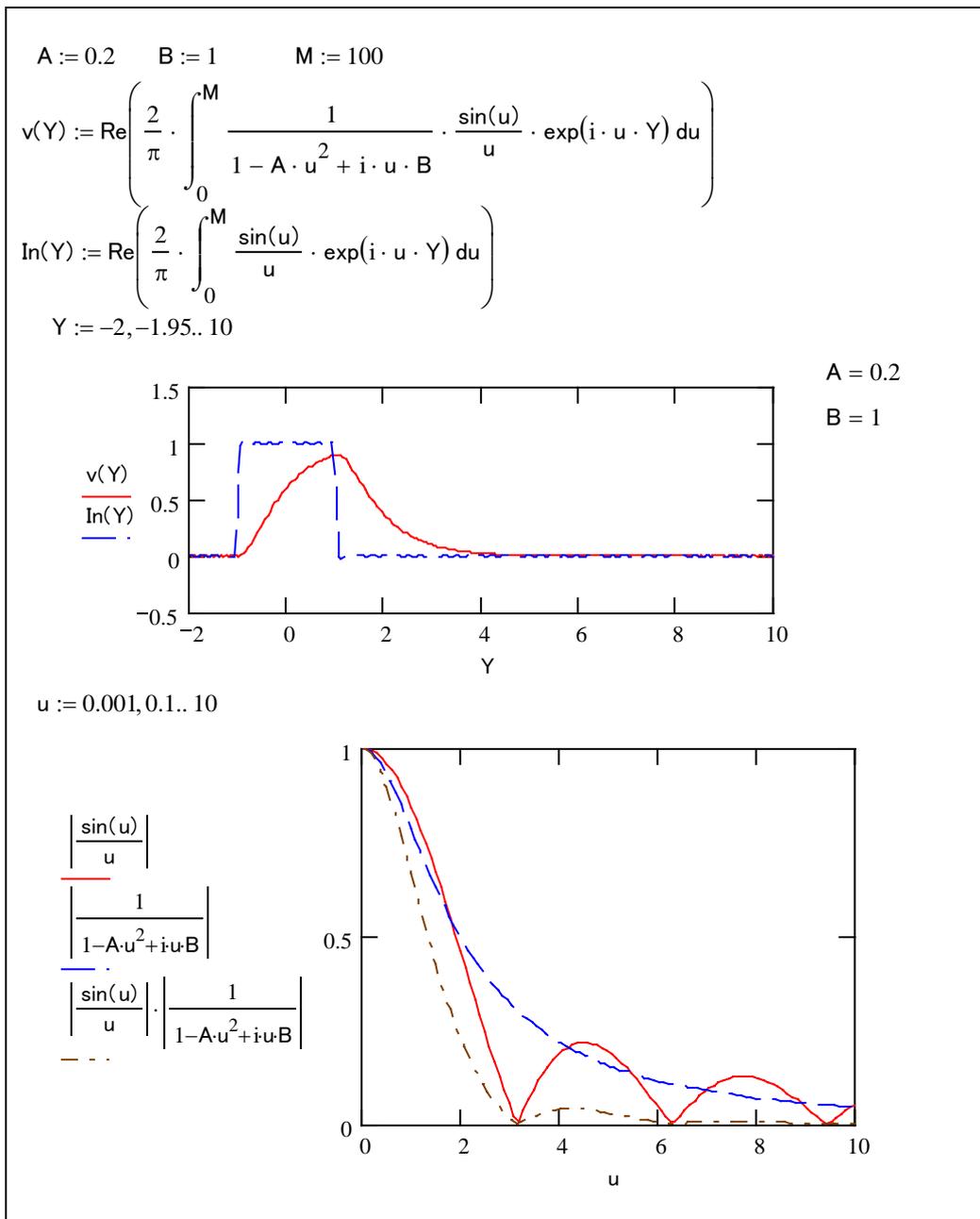
クトル密度 $F(j\omega) = 2Ea \frac{\sin \omega a}{\omega a}$ (演習 2.1.1) を用いる。これらより、出力波形は

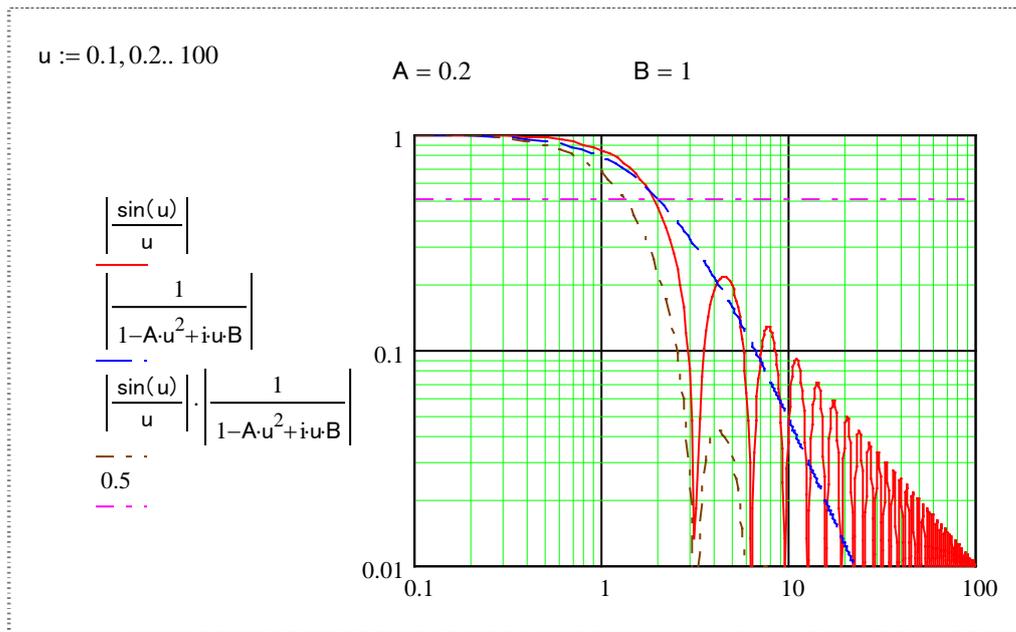
$$v_o(t) = \operatorname{Re} \left[\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{-\omega^2 LC + j\omega RC + 1} 2Ea \frac{\sin \omega a}{\omega a} \exp(j\omega t) d\omega \right]$$

となる。これを次のように規格化する。

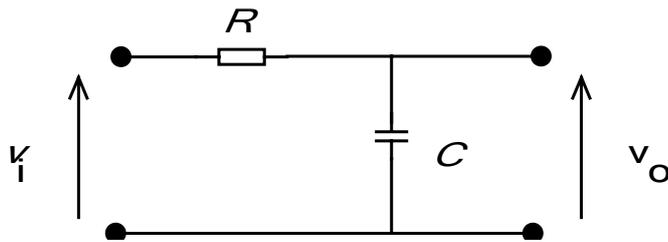
$$v_o(t) = \operatorname{Re} \left[\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{-u^2 A + juB + 1} 2E \frac{\sin u}{u} \exp(juY) du \right]$$

$$A = \frac{LC}{a^2} \quad B = \frac{RC}{a} \quad Y = \frac{t}{a} \quad E = 1$$

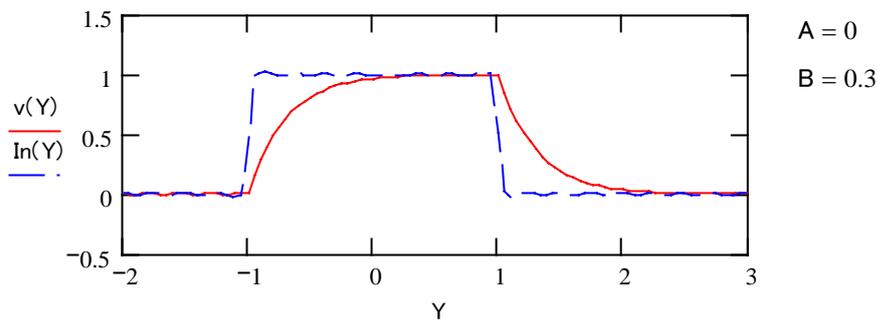




演習 3.5.1 図の回路の周波数特性、振幅特性、位相特性を求めよ。それぞれをグラフに描け。縦軸、横軸共に対数を用いよ。



演習 3.5.2 上の回路を単一矩形パルスが通過したときの波形を図に示す。波形がこうに変形した理由を回路の周波数特性を用いて説明せよ。
ヒント：矩形パルスのスペクトル密度分布を考えよ。



4 離散フーリエ変換

アナログ信号をデジタル信号処理するには、連続的な信号を一定時間間隔でサンプリングする必要がある。シャノンの標本化定理 (3.4) によれば、有限周波数帯域をもつ連続信号を適切なサンプリングによって離散化しても、信号のすべての情報を保持できる。

ここでは周期的関数をサンプリングにより離散化した関数のフーリエ級数展開について述べる。結論だけ求めるならばいきなり 4.2 に跳んで構わない。

4.1 周期関数のサンプリング値から求めたフーリエ係数

連続的で周期的な関数 $f(t)$ からサンプリングして得た離散周期関数 $f_s(t)$ を次のように定義する。サンプリング間隔を T_s 、元の関数 $f(t)$ の周期 T は NT_s に等しいとする。 N は整数である。

$$f_s(t) = T_s \sum_{n=0}^{N-1} f(t) \delta(t - nT_s) \quad -\varepsilon < t \leq NT_s - \varepsilon \quad \varepsilon > 0$$

$$f_s(t + nT) = f_s(t) \quad n \text{ は整数}$$

一周期の設定にあたって δ 関数が境界にかからないように微少量 ε だけずらした。 $f_s(t)$ は周期関数であるから次のようにフーリエ級数展開して表すことができる。

$$f_s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp\left(ik \frac{2\pi}{T} t\right)$$

フーリエ係数 c_k は次となる。

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T} \int_{-\varepsilon}^{NT_s - \varepsilon} f_s(t) \exp\left(-jk \frac{2\pi}{T} t\right) dt = \frac{1}{NT_s} \int_{-\varepsilon}^{NT_s - \varepsilon} \left(T_s \sum_{n=0}^{N-1} f(t) \delta(t - nT_s) \right) \exp\left(-jk \frac{2\pi}{NT_s} t\right) dt \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \int_{-\varepsilon}^{NT_s - \varepsilon} \left(f(t) \exp\left(-jk \frac{2\pi}{NT_s} t\right) \right) \delta(t - nT_s) dt = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(nT_s) \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} kn\right) \end{aligned}$$

以下に示すように、このフーリエ係数は周期 N の周期性をもつ。

$$c_{k+N} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(nT_s) \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} (k+N)n\right) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(nT_s) \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} kn\right) = c_k$$

すなわち、離散周期関数は離散周期スペクトルをもつ。

さて、離散スペクトル 1 周期分について和を次のようにとってみる ($f_s(t)$ を求めようとしていないところに注意)。

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N-1} c_k \exp\left(jk \frac{2\pi}{T} n T_s\right) &= \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} f(m T_s) \exp\left(-jk \frac{2\pi}{N} m\right) \right) \exp\left(jk \frac{2\pi}{N T_s} n T_s\right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} f(m T_s) \left(\sum_{k=0}^{N-1} \exp\left(jk \frac{2\pi}{N} (n - m)\right) \right) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} f(m T_s) N \delta_{nm} = f(n T_s) \end{aligned}$$

ここで次を用いた。

$$\sum_{k=0}^{N-1} \exp\left(jk \frac{2\pi}{N} (n - m)\right) = \begin{cases} N & n = m \\ \frac{1 - \exp\left(jN \frac{2\pi}{N} (n - m)\right)}{1 - \exp\left(j \frac{2\pi}{N} (n - m)\right)} = 0 & n \neq m \end{cases}$$

結局、次の関係が導かれた(これを天下りの的に与え、成り立つことを確認してもよかった)。

$$f(n T_s) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{m=0}^{N-1} f(m T_s) \exp\left(-jk \frac{2\pi}{N} m\right) \right) \exp\left(jn \frac{2\pi}{N} k\right)$$

ここで改めて $f_n = f(n T_s)$ とし、

$$F_k = \sum_{n=0}^{N-1} f_n \exp\left(-jk \frac{2\pi}{N} n\right) \quad \text{を離散フーリエ変換、そして}$$

$$f_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F_k \exp\left(jn \frac{2\pi}{N} k\right) \quad \text{を離散フーリエ逆変換と呼ぶ。}$$

4. 2 離散フーリエ変換

単位円を N 分割した点に相当する複素変数 W を次で定義する。

$$W = \exp\left(-j \frac{2\pi}{N}\right)$$

このとき、**4.1** に述べたことから、離散フーリエ変換、逆変換は、それぞれ

$$F_k = \sum_{n=0}^{N-1} f_n W^{kn} \quad f_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F_k W^{-nk}$$

と表される。

離散信号値、離散スペクトル値、どちらも N 個のデータからなる。このままデジタル処理できる形のフーリエ級数展開である。

さらに対称性を用いると演算量を減らして高速に変換演算できる。それが 1965 年に Cooley と Tukey とにより発表された高速フーリエ変換法 (FFT) である。

フーリエ変換の演習問題

フーリエ変換についての話は本日でおしまい。そこで改めてフーリエ変換について考えてみよう。
この考えてみるのが演習（計算だけが演習ではない）

1 スペクトルとは何？

光のスペクトル／太陽光をプリズムに通すと色に分かれる／あの色の分布（直感的）／光は電磁波、時間的に振動、振動周波数に対する振動振幅の分布が色の分布／この分布を求める数学的方法はフーリエ変換／時間波形のフーリエ変換／拡張して関数のフーリエ変換が、その関数のスペクトル

2 スペクトルを用いると何ができる？

光の例をとるならば色が判別できる（これは目の方が早い。色フィルタも使える）／ある関数について ”色”（これは比喻）を判定できる（関数の同定）／他に関数の補正、など様々な処理が可能

3 処理とは何？

回路は電気信号に ”処理” を施す／その処理は入力に対する出力応答で定義できる／回路に信号が入力されたとき出力を得る方法を考えると／回路の伝達関数 $K(j\omega)$ を求めておく（回路が与えられたら決まる（線形回路理論））／次に入力信号のスペクトル $F_{in}(j\omega)$ を求める。これがフーリエ変換／出力信号のスペクトルは $F_{out}(j\omega) = K(j\omega) F_{in}(j\omega)$ ／出力信号はこれのフーリエ逆変換で得られる

4 では実際にスペクトルを求めるには

光の場合、周波数が高すぎる、アナログ的方法しかない、プリズム、分光器／電気信号では、今はデジタル技術が使われる／ではどうするのか／信号は非周期的としよう／しかし無限時間を扱うことはできない／有限時間 T でカット（カットするとき、有限の振幅をいきなり切ると問題が生じるので要注意）／カットしたら周期 T の周期信号とみなしても構わない／（周期信号の一周期分だけに注目すればよい。それ以外の部分は無視すればよい）／周期信号になった／デジタル技術を用いるには連続信号をそのままは扱えない／そこでサンプリングする／サンプリングの周期 T_s はどうきめたらよいか／信号のスペクトルが分かっているときは最大周波数 f_{max} を f_c として $T_s = 1/(2f_c)$ ／もしスペクトルが分からない、または、ただらと尾を引いている場合は？／最大周波数をこちらで決める／ok それだけで大丈夫／ダメ！／入力信号から f_c 以上のスペクトル成分をあらかじめ除去しなければ悪影響がでる（これはエイリアシング誤差と呼ばれる。詳細は略）／そこで f_c 以上のスペクトル成分を除去するローパスフィルタに信号を通過させる／そしてサンプリング／具体的にはどうする／アナログ電圧の瞬時値をホールドする（サンプルホールド回路）／ホールドされている電圧をデジタル値に変換する（アナログデジタル変換器）／ここで連続な電圧を量子化してデジタル値にする（量子化誤差が入る）／（フルスケール値を 2^m に分割し何番目の範囲に入るか判定。 m はビット数）／このようにして f_n の値が取得される／あとは離散フーリエ変換（DFT）によって離散スペクトルが求められる／これで現実の信号のスペクトルをデジタル的に取得することができる／周期的離散的信号（有限時間）を周期的離散的スペクトル（有限幅）に変換
連続無限の信号を、どのように、扱うかについて、アイデアが得られましたか

5 ラプラス変換

フーリエ変換では $-\infty < t < \infty$ で定義された関数 $f(t)$ に $\exp(-j\omega t)$ をかけ、 $-\infty < t < \infty$ で積分して $F(j\omega)$ を得た。しかし $f(t)$ の $t \rightarrow \pm\infty$ での振る舞いが悪くて積分が収束せず、 $F(j\omega)$ が定義できない場合がある。これに対して、区間 $0 \leq t < \infty$ のみを考え、 $\exp(-j\omega t)$ の代わりに $\exp(-(\sigma + j\omega)t)$ をかけて $0 \leq t < \infty$ で積分するのがラプラス変換である。ここで σ は積分が収束するような値とする。こうして変換された関数をラプラス変換とよぶ。フーリエ変換からラプラス変換に移ることにより変換できる関数の範囲が広がる。

フーリエ級数あるいはフーリエ変換から元の関数が再現されたように、ラプラス変換から元の関数が再現される。ここではこれらについて述べ、さらに理工学上の応用を述べる。

微分方程式の解を $t=0$ での初期条件だけ与えて $t>0$ の範囲で求めるのに、ラプラス変換が便利に使える。ラプラスは1812年にこの変換を微分方程式の解法に応用した。これはフーリエ級数、フーリエ変換が用いられるより前の出来事だ。

5. 1 $[0, \infty)$ 上の関数とラプラス変換

$0 \leq t < \infty$ で定義された関数 $f(t)$ が $t \rightarrow \infty$ で発散し、フーリエ積分 $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-j\omega t) dt$ が計算できないとする。これに対して、 $-\infty < t < 0$ で $f(t) = 0$ として関数の定義域を変更し、この $f(t)$ に減衰関数 $\exp(-\sigma t)$ をかけて ∞ での発散を抑えた関数 $g(t) = \exp(-\sigma t) f(t)$ をつくり、これをフーリエ変換する。

$$G(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} (\exp(-\sigma t) f(t)) \exp(-j\omega t) dt = \int_0^{\infty} (\exp(-\sigma t) f(t)) \exp(-j\omega t) dt$$

は積分でき、 $g(t)$ のフーリエ変換 $G(j\omega)$ を求めることができる。そしてフーリエ逆変換

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(j\omega) \exp(j\omega t) d\omega \quad \text{により } g(t) \text{ が再現でき、}$$

$$f(t) = \exp(\sigma t) g(t) = \frac{1}{2\pi} \exp(\sigma t) \int_{-\infty}^{\infty} G(j\omega) \exp(j\omega t) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(j\omega) \exp((\sigma + j\omega)t) d\omega$$

として $f(t)$ も再現できる。単なるフーリエ変換・逆変換だけではできなかったことが可能になった。この方法が採れたのは、 $f(t)$ の自由に定義できる定義域を $0 \leq t < \infty$ に制限したからである（もし $-\infty < t < 0$ で自由な関数定義を許したら、 $-\infty$ で $f(t) \exp(-\sigma t)$ が発散する場合があります、一般にはこの方法が使えなくなる）。

以上の結果をまとめると次のように表現できる。

$$G(j\omega) = \int_0^{\infty} f(t) \exp(-(\sigma + j\omega)t) dt \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(j\omega) \exp((\sigma + j\omega)t) d\omega$$

ここで記法を改めて $s = \sigma + j\omega$ とおいて

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \exp(-st) dt \quad \text{ラプラス変換}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(s) \exp((\sigma + j\omega)t) d\omega$$

が成り立つことは明らかである。その根拠はフーリエ変換の存在に帰着される。ラプラス逆変換は上の通りだが、 $ds = jd\omega$ であることに注意し、記法として

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} F(s) \exp(st) ds \quad \text{ラプラス逆変換}$$

と表す。典型的な関数についてはラプラス変換が得られており、表にされている。以上がラプラス変換とラプラス逆変換の定義である。

以下に補足事項を述べる。ラプラス変換で用いられる σ の値は、積分が十分に速く収束するように、一つ決めて固定しておく。ラプラス変換を応用する際、最終結果は σ の決め方によらない。

σ の値については、ある臨界値 σ_c があって、 $\sigma > \sigma_c$ (収束域) では $F(s)$ が存在し、 $\sigma < \sigma_c$ では存在しない場合がある。例えば、

$$\begin{aligned} t \rightarrow \infty \text{ で } f(t) \rightarrow \exp(\alpha t) & \quad \text{ならば } \sigma_c = \alpha \\ t \rightarrow \infty \text{ で } f(t) \rightarrow t^n & \quad \text{ならば } \sigma_c = 0 \quad \text{である。} \end{aligned}$$

ラプラス変換が存在しないような関数もある。例えば、

$$t \rightarrow \infty \text{ で } f(t) \rightarrow \exp(t^2) \quad \text{となるような関数にはラプラス変換は存在しない。}$$

ラプラス変換の定義における積分範囲は $[0, \infty]$ であった。 $t=0$ で不連続な関数を扱う場合がある (δ 関数 $\delta(t)$ はその一例である)。その場合には定義における積分範囲を $[-\varepsilon, \infty]$ あるいは $[\varepsilon, \infty]$ にして、 $\varepsilon \rightarrow 0$ ($\varepsilon > 0$) とするよう定義し直す。定義と矛盾しないラプラス変換、逆変換を行えばよい。以下の演習で採り上げる δ 関数のラプラス変換では、定義を次とすればよい。

$$F(s) = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{-\varepsilon}^{\infty} f(t) \exp(-st) dt$$

演習 5.1.1 単位階段関数のラプラス変換を求めよ。

$$Y(t) = 1 \quad (t \geq 0)$$

演習 5.1.2 単一パルスのラプラス変換を求めよ。

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (t > 2a) \\ E & (0 \leq t \leq 2a) \end{cases}$$

演習 5.1.3 減衰パルスのラプラス変換を求めよ。

$$f(t) = \exp(-\alpha t) \quad (0 \leq t)$$

演習 5.1.4 δ 関数のラプラス変換を求めよ。

演習 5.1.5 正弦波関数のラプラス変換を求めよ。

$$f(t) = E \sin \omega_0 t \quad (0 \leq t)$$

ラプラス変換表

| $f(t)$ | \Leftrightarrow | $F(s)$ | $f(t)$ | \Leftrightarrow | $F(s)$ |
|-----------------------------------|-------------------|--------------------------------------------|---------------------------------|-------------------|--------------------------------------------|
| $\delta(t)$ | | 1 | $\cos \omega t$ | | $\frac{s}{s^2 + \omega^2}$ |
| $Y(t)$ step function | | $\frac{1}{s}$ | $\sin \omega t$ | | $\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$ |
| t | | $\frac{1}{s^2}$ | $\cosh \alpha t$ | | $\frac{s}{s^2 - \alpha^2}$ |
| $\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$ | | $\frac{1}{s^n} \quad (n=1,2,\dots)$ | $\sinh \alpha t$ | | $\frac{\alpha}{s^2 - \alpha^2}$ |
| $\exp(at)$ | | $\frac{1}{s-a} \quad \text{Re}[s] > a$ | $\exp(-\alpha t) \cos \omega t$ | | $\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2 + \omega^2}$ |
| $t \exp(at)$ | | $\frac{1}{(s-a)^2} \quad \text{Re}[s] > a$ | $\exp(-\alpha t) \sin \omega t$ | | $\frac{\omega}{(s+\alpha)^2 + \omega^2}$ |
| $\frac{t^{n-1} \exp(at)}{(n-1)!}$ | | $\frac{1}{(s-a)^n} \quad \text{Re}[s] > a$ | | | |

5. 2 ラプラス変換の性質

ラプラス変換、ラプラス逆変換の演算を表すのに次の記号を用いる。

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) \qquad \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$$

ラプラス変換には以下の性質がある。

$$(1) \quad \mathcal{L}[\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)] = \alpha \mathcal{L}[f_1(t)] + \beta \mathcal{L}[f_2(t)]$$

$$(2) \quad \mathcal{L}[f(t - \tau)] = \exp(-\tau s) \mathcal{L}[f(t)] \quad (\tau > 0)$$

ただし関数 $f(t - \tau)$ は $t \geq \tau$ で値をもち、 $t < \tau$ では 0 である。

$$(3) \quad \mathcal{L}[\exp(-at)f(t)] = F(s + a) \qquad \text{ただし変換が存在するとき}$$

$$(4) \quad \mathcal{L}[f(At)] = \frac{1}{A} F\left(\frac{s}{A}\right) \quad (A > 0)$$

$$(5) \quad \mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0)$$

$$\mathcal{L}[f''(t)] = s^2 F(s) - \{sf(0) + f'(0)\}$$

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - \{s^{n-1}f(0) + s^{n-2}f'(0) + \dots + sf^{(n-2)}(0) + f^{(n-1)}(0)\}$$

ただし、 $\lim_{t \rightarrow \infty} f^{(i)}(t) \exp(-st) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$ であるとき

この性質を証明するには、部分積分を用いる。すなわち、

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f'(t)] &= \int_0^{\infty} f'(t) \exp(-st) dt \\ &= [f(t) \exp(-st)]_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} f(t) \exp(-st) dt = sF(s) - f(0) \end{aligned}$$

$$(6) \quad \mathcal{L}[f * g] = F(s)G(s)$$

ここでラプラス変換における畳み込み関数は次で定義される。

$$f_1 * f_2 = f(x) = \int_0^x f_1(y) f_2(x-y) dy$$

演習 5.2.1 上の(1)から(6)の性質を証明せよ。

5.3 ラプラス変換による微分方程式解法

定数係数線形微分方程式

$$\frac{d^n}{dt^n} y(t) + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} y(t) + \cdots + a_1 \frac{d}{dt} y(t) + a_0 y(t) = f(t)$$

の解をラプラス変換を用いて解いてみよう。 $\mathcal{L}[y(t)] = Y(s)$ 、 $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ とする。

両辺をラプラス変換し、**5.2** で述べた性質を用いると次が得られる。

$$\begin{aligned} s^n Y(s) - \{y(0)s^{n-1} + y'(0)s^{n-2} + \cdots + y^{(n-1)}(0)\} \\ + a_{n-1} [s^{n-1} Y(s) - \{y(0)s^{n-2} + y'(0)s^{n-3} + \cdots + y^{(n-2)}(0)\}] \\ + \cdots + a_1 [sY(s) - y(0)] + a_0 Y(s) = F(s) \end{aligned}$$

これを整理すると次になる。

$$\begin{aligned} \{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0\} Y(s) \\ = F(s) + \{s^{n-1} + a_{n-1}s^{n-2} + \cdots + a_1\} y(0) + \{s^{n-2} + a_{n-1}s^{n-3} + \cdots + a_2\} y'(0) + \cdots + y^{(n-1)}(0) \end{aligned}$$

ここで $A(s) \equiv s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0$ とおくと

$$Y(s) = \frac{F(s)}{A(s)} + \frac{s^{n-1} + a_{n-1}s^{n-2} + \cdots + a_1}{A(s)} y(0) + \frac{s^{n-2} + a_{n-1}s^{n-3} + \cdots + a_2}{A(s)} y'(0) + \cdots + \frac{1}{A(s)} y^{(n-1)}(0)$$

$y(t)$ を求めるには、さらに作業を続けなければならない。この作業を説明するために、例題としてつぎの微分方程式をラプラス変換を用いて解くことにする。

例題： $\frac{d^2y}{dt^2} - 5\frac{dy}{dt} + 4y = 12 + 9\exp(t) + 5\sin 2t$ 初期条件： $t=0$ で $y = 1$ $\frac{dy}{dt} = -2$

求める関数 $y(t)$ のラプラス変換を $Y(s)$ と表す。両辺のラプラス変換を求め、それらを等しいとおく。左辺については、まず前節で述べたラプラス変換の性質(1)と(5)を用いて次のようになる。

$$(s^2Y - (sy(0) + y'(0))) - 5(sY - y(0)) + 4Y$$

初期条件を代入して $(s^2Y - (s - 2)) - 5(sY - 1) + 4Y = (s^2 - 5s + 4)Y - s + 7$

右辺については、積分計算しないで、ラプラス変換表を参照する(ラプラス変換表は重要。ただしよく使う変換は覚えていることが多いが)。定数は単位ステップ関数である。

$$\frac{12}{s} + \frac{9}{s-1} + \frac{5 \cdot 2}{s^2 + 4}$$

左辺と右辺とで等式を作る。

$$(s^2 - 5s + 4)Y - s + 7 = \frac{12}{s} + \frac{9}{s-1} + \frac{5 \cdot 2}{s^2 + 4}$$

$Y(s)$ について解く。

$$Y(s) = \frac{s - 7 + \frac{12}{s} + \frac{9}{s-1} + \frac{5 \cdot 2}{s^2 + 4}}{s^2 - 5s + 4}$$

これで解のラプラス変換が得られた。これを逆変換すれば解が得られる。そこで逆変換を積分計算・・・ではなくて、またラプラス変換表を参照する。この変換表参照で済ませるところがラプラス変換を用いて解く方法の利点である。しかしこのままでは表参照できない。部分分数展開して、表に載っている比較的簡単な分数式の和として表す必要がある。その作業は以下のように行う。

まず分母を因数分解する。そのためには根を求めればよい。この例では簡単に因数分解できて $s^2 - 5s + 4 = (s-4)(s-1)$ となる。そこで次のように展開される。

$$Y(s) = \frac{s}{(s-4)(s-1)} - \frac{7}{(s-4)(s-1)} + \frac{12}{s(s-4)(s-1)} + \frac{9}{(s-4)(s-1)^2} + \frac{10}{(s^2+4)(s-4)(s-1)}$$

これをさらに部分分数展開する。まず重根を含まない場合から始める。

$$(X(s) =) \frac{s}{(s-4)(s-1)} = \frac{a_1}{s-4} + \frac{a_2}{s-1} \text{ とおき、 } a_1, a_2 \text{ を求める。そのために両辺に } (s-4) \text{ をか}$$

けて、 $s=4$ とすると、左辺は a_1 となり、右辺は $4/3$ となる。したがって $a_1=4/3$ と求まる。一方、両辺に $(s-1)$ をかけて $s=1$ として、 $a_2=-1/3$ となる。

この手法を一般化すると以下になる。

重根がない場合の部分分数展開法： $X(s)$ の分母が $\prod_{i=1}^m (s-s_i)$ と因数分解されているとき、

$$X(s) = \sum_{i=1}^m \frac{a_i}{s-s_i} \text{ と展開したときの係数は } a_i = (s-s_i)X(s) \Big|_{s=s_i} \text{ で求めることができる。}$$

次に重根が含まれる場合の部分分数展開は次のように行う。

$$(X(s) =) \frac{9}{(s-4)(s-1)^2} = \left(\frac{a_{1,1}}{s-1} + \frac{a_{1,2}}{(s-1)^2} \right) + \frac{a_2}{s-4} \text{ の両辺に } (s-1)^2 \text{ をかけると、}$$

$$(s-1)^2 X(s) = (a_{1,1}(s-1) + a_{1,2}) + (s-1)^2 \frac{a_2}{s-4} \quad (1)$$

そこで両辺に $s=1$ を代入すると、 $a_{1,2} = (s-1)^2 X(s) \Big|_{s=1} = \frac{9}{1-4} = -3$ となる。次に式 (1)

を s で微分すると $\frac{d}{ds}((s-1)^2 X(s)) = a_{1,1} + 2(s-1)\frac{a_2}{s-4} - (s-1)^2 \frac{a_2}{(s-4)^2}$ となるから、

ここで $s=1$ を代入すると $a_{1,1} = \frac{d}{ds}((s-1)^2 X(s)) \Big|_{s=1} = \frac{d}{ds} \frac{9}{s-4} \Big|_{s=1} = -\frac{9}{(s-4)^2} \Big|_{s=1} = -1$

と求めることができる。この手法を一般化すると以下になる。

重根を含む場合の部分分数展開法： $X(s)$ の分母が $\prod_{i=1}^m (s-s_i)^{l_i}$ と因数分解されているとき、

$X(s) = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^{l_i} \frac{a_{i,j}}{(s-s_i)^j} \right)$ と部分分数展開したときの係数は、

$a_{i,j} = \frac{1}{(l_i - j)!} \frac{d^{l_i-j}}{ds^{l_i-j}} \left((s-s_i)^{l_i} X(s) \right) \Big|_{s=s_i}$ で求めることができる。

以上の作業の結果、我々の式は次のように部分分数展開される。

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{-1}{s-4} + \frac{2}{s-1} + \frac{3}{s} + \frac{1}{(s-4)} + \frac{-4}{(s-1)} + \frac{1}{(s-4)} + \frac{-1}{(s-1)} + \frac{-3}{(s-1)^2} \\ &+ \frac{1}{(s+2i)-4i(-2i-4)(-2i-1)} + \frac{1}{(s-2i)4i(2i-4)(2i-1)} + \frac{1}{6} \frac{1}{(s-4)} - \frac{2}{3} \frac{1}{(s-1)} \\ &= \frac{7}{6} \frac{1}{(s-4)} - \frac{11}{3} \frac{1}{(s-1)} - \frac{3}{(s-1)^2} + \frac{3}{s} + \frac{1}{2s^2+4} \end{aligned}$$

各項は変換表を参照して時間関数に変換できる。

$$y(t) = \frac{7}{6} \exp(4t) - \frac{11}{3} \exp(t) - 3t \exp(t) + 3 + \frac{1}{2} \cos 2t$$

ラプラス変換による解法の特徴は、微分方程式が代数方程式のような演算で解けることと、初期条件を取り込んで解が得られることである。フーリエ変換ではこれはできなかった。それは積分範囲の下限が $-\infty$ であったからである。 $-\infty$ で関数が有限値をもつとすると積分は ∞ になり、フーリエ変換が得られない。 $-\infty$ で関数値が零ならば初期値を取り込みようがない。ところが、ラプラス変換は積分範囲の下限が 0 である。その点での値すなわち初期値を取り込むことができる。

演習 5.3.1 次の微分方程式をラプラス変換を用いて解け。

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 4 \frac{dy}{dt} + 5y = \delta(t-1) \quad t > 0 \quad \text{初期条件 : } t=0 \quad y = \frac{4}{5} \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{12}{5}$$

5. 4 回路の過渡応答

回路解析にラプラス変換を用いると、初期値を設定して解くことができ、過渡現象を解くことができる。ラプラス変換もフーリエ変換も同じように表を用いて解析解を得ることは可能である。初期値を取り込んだ解析ができるかどうかには両者の差が現れる。

例題を解いてみよう。回路の構成要素である L 、 C 、 R では、その両端の電圧 $v(t)$ とそれに流れる電流 $i(t)$ との関係は次のようになっている。回路の記法として電圧を計る向きは電流が流れる方向と逆にとる。

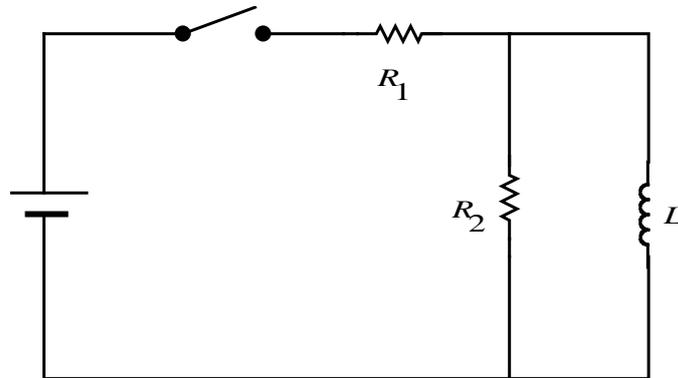
$$v(t) = Ri(t) \quad v(t) = L \frac{d}{dt} i(t) \quad i(t) = C \frac{d}{dt} v(t)$$

これらをラプラス変換する。 $\mathcal{L}[v(t)] = V(s)$ 、 $\mathcal{L}[i(t)] = I(s)$ として、5.2 で述べた性質を用いると次のようになる。

$$V(s) = RI(s) \quad V(s) = L(sI(s) - i(0_-)) \quad I(s) = C(sV(s) - v(0_-))$$

ここで $i(0_-)$ および $v(0_-)$ はスイッチオン直前の電流値および電圧値である。ラプラス変換の積分の下限は $-\varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) とする。ここで初期条件が取り込まれる。

次の例題を解いてみる。



L を流れる電流を $i(t)$ として、これを求めることにする。両端の電圧は $v(t) = L \frac{di}{dt}$ 、

R_2 に流れる電流は $i_2(t) = \frac{v}{R_2} = \frac{L}{R_2} \frac{di}{dt}$ 、両方合わせた電流が R_1 を通り、そこでの電圧降下

は $v_1(t) = R_1 \left(i + \frac{L}{R_2} \frac{di}{dt} \right)$ であるから、全体の微分方程式は、 $R_1 \left(i + \frac{L}{R_2} \frac{di}{dt} \right) + L \frac{di}{dt} = EY$

この方程式をラプラス変換して

$$R_1 \left(I + \frac{L}{R_2} (sI - i(0_-)) \right) + L(sI - i(0_-)) = \frac{E}{s}$$

これを I について解くと、

$$I = \frac{E}{L\left(\frac{R_1}{R_2} + 1\right)} \frac{1}{s \left(s + \frac{1}{L\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1}\right)} \right)} + \frac{i(0_-)}{s + \frac{1}{L\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1}\right)}} = \frac{E}{R_1} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{L\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1}\right)}} \right) + \frac{i(0_-)}{s + \frac{1}{L\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1}\right)}}$$

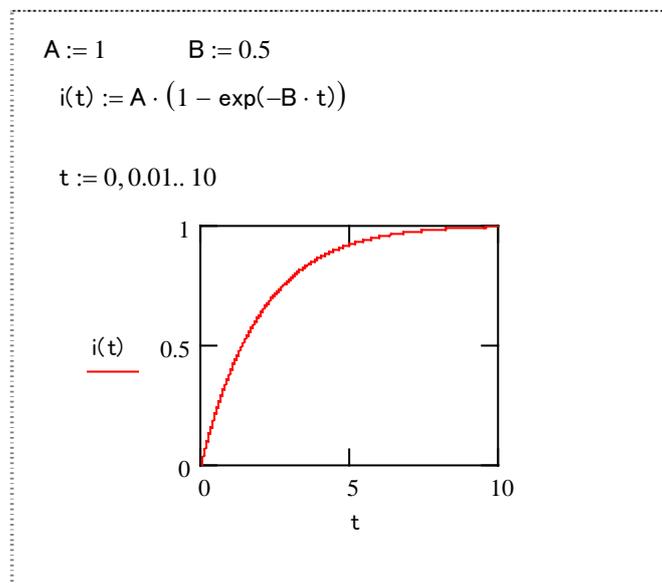
これをラプラス逆変換して

$$i = \frac{E}{R_1} \left(Y - \exp\left(-\frac{1}{L\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1}\right)} t\right) \right) + i(0_-) \exp\left(-\frac{1}{L\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1}\right)} t\right) = \frac{E}{R_1} Y + \left(i(0_-) - \frac{E}{R_1} \right) \exp\left(-\frac{1}{L\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1}\right)} t\right)$$

最初スイッチが開いていて、 $t=0$ で E の電圧が加わる場合を考える。 $t<0$ ではスイッチは十分に長い時間開いていたとすると回路のどこにも電流は流れていない。そこで初期条件は $i(0_-)=0$ である。これを代入すると、インダクタを流れる電流は、 $t>0$ で

$$i = \frac{E}{R_1} \left(1 - \exp\left(-\frac{1}{L\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1}\right)} t\right) \right)$$

となる。電流は零から直線的に上昇し、飽和しはじめ、最終値 E/R_1 に近づいていく。最終値の $(1-1/e)$ に到達するまでの時間は $L\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1}\right)$ である。



演習 5.4.1 ラプラス変換を用いずに、例題を解いてみよ。

演習 5.4.2 例題の回路について、スイッチは元々閉じていて、 $t=0$ で開いた場合のインダクタに流れる電流値、インダクタ両端に発生する電圧を求めよ。

ヒント 電圧の代わりに電流の式を用いよ。

演習 5.4.3 例題の回路について、インダクタに流れる電流のインパルス応答をラプラス変換を用いて求めよ。インパルス応答のフーリエ変換が伝達関数になっていることを確認せよ。

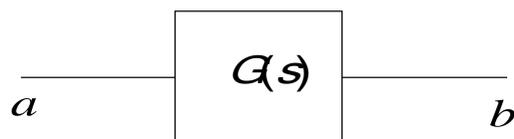
ヒント 入力関数を δ 関数にするとインパルス応答が得られる。

ラプラス変換は電気回路以外にも使われる。例えば、自動制御の分野では次のようなブロック線図とともに用いられる。

ブロック線図は“自動制御系の中での信号伝達のありさまを表す線図で、電気工学において用いられている回路図に相当するもの”と言われる。

ブロック線図は回路図とは異なって、実際の回路の記号的表現ではない。着目している回路の中をどのように信号（制御信号）が伝達するかを表現するものである。

最も簡単なブロック線図を以下に示す。たった一つの伝達要素からなり、入力信号 a が出力信号 b にどのように伝達されるかを示している。この例では、信号 a, b のラプラス変換をそれぞれ A, B として、 $B(s) = G(s)A(s)$ であることを表す。



演習 5.4.1 次にスイッチは元々閉じていて、 $t=0$ で開いた場合のインダクタに流れる電流値、インダクタ両端に発生する電圧を求めよ。