ロボット工学第二　補遺

倉林大輔

目 次

3　位置制御 **1**
3.1　線形制御の復習 1
3.2　線形軌道追従制御 2
3.3　マニピュレータの制御：関節空間での制御 2
3.4　手先座標系での制御 3
3.5　分解速度法 4
3.6　大きな減速比を持つシステム 5
3.7　一定外乱と PID 制御 5

3　位置制御

3.1　線形制御の復習

ロボット（マニピュレータ）の方程式は、本質的に非線形であり、近似を排するなら非線形制御にならざるを得ない。しかし、線形制御におけるサーボの考え方は、非線形制御においても非常に役立つ。まずは、線形サーボについて簡単に復習してみよう。

いま、(1) に示すバネ・マス・ダンパ系に外からの力（入力）u がかかっているものとしよう。

$$m\ddot{x} + d\dot{x} + kx = u \tag{1}$$

これに対し、(2) の制御側を適用してやると、系は (3) となり、k_p,k_v によって好きなようにシステムの特性を変えることができる。

$$u = -k_v\dot{x} - k_p x \tag{2}$$

$$m\ddot{x} + (d + k_v)\dot{x} + (k + k_p)x = 0 \tag{3}$$

さて、これをモデルに関する部分とサーボ部分（目標に対する誤差の特性を決定する部分）に分けて考えてみよう。いま、(1) のシステムに対して、入力を (4) としてみよう。

$$u = \alpha v + \beta \tag{4}$$

ここで、$\alpha = m,\ \beta = d\dot{x} + kx$ とおいて、(1) に (4) を入力して整理すれば、(5) が得られる。

$$\ddot{x} = v \tag{5}$$

つまり、v を新たな入力と考えれば、$\ddot{x}$ に直接作用できることになる。そこで、

$$v = -k_v\dot{x} - k_p x \tag{6}$$

とすれば、(5) より

$$\ddot{x} + k_v\dot{x} + k_p x = 0 \tag{7}$$

となる。こうすれば、制御系のゲイン設定は、元の系のパラメタに依存せずに決められる。

3.2 線形軌道追従制御

再び (1) のシステムについて考える。いま、状態変数の目標軌道を $x_d(t)$、サーボ誤差を $e = x_d - x$ とおくことにする。制御則として、

$$v = \ddot{x}_d + k_v\dot{e} + k_p e \tag{8}$$

を用いれば、(5) より

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \ddot{x}_d + k_v\dot{e} + k_p e \\ \rightarrow & \quad \ddot{e} + k_v\dot{e} + k_p e = 0 \end{aligned}$$

となり、やはり元のパラメタに依存せずにサーボ誤差をゼロにできる。この手法は、モデルの誤差（α, β）がなければ、うまく作用する。

3.3 マニピュレータの制御：関節空間での制御

はじめに、制御則について簡単に復習しておく。いま、反力が変位の 3 乗に比例するという、特殊な非線形ばねを持つ系 (9) を考えよう。

$$m\ddot{x} + d\dot{x} + kx^3 = u \tag{9}$$

ここで、

$$\begin{aligned} u &= \alpha v + \beta \\ \alpha &= m \\ \beta &= d\dot{x} + kx^3 \end{aligned}$$

とおき、サーボを

$$\begin{aligned} v &= \ddot{x}_d + k_v\dot{e} + k_p e \\ e &= x_d - x \end{aligned}$$

とすれば、線形制御のときと同様に、誤差 e をゼロにすることができる。

マニピュレータを制御するにあたって、関節の角度 $\boldsymbol{q}$、関節の速度 $\dot{\boldsymbol{q}}$、手先位置 $\boldsymbol{x}$、手先位置速度 $\dot{\boldsymbol{x}}$ はエンコーダやセンサによって計測できると仮定する。

マニピュレータの運動方程式は (10) のように表せる。ここで $G(\boldsymbol{q})$ は重力項、$V(\dot{\boldsymbol{q}})$ は粘性摩擦項を表す。これ以降では、表記を簡単にするため、(11) のように書くものとする。

$$\boldsymbol{\tau} = M(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + h(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) + V(\dot{\boldsymbol{q}}) + G(\boldsymbol{q}) \tag{10}$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\tau} &= M(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + \hat{h}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \\
\hat{h}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) &= h(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) + V(\dot{\boldsymbol{q}}) + G(\boldsymbol{q})
\end{aligned} \tag{11}
$$

このとき、新たな入力を $\boldsymbol{u}$ として、

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\tau} &= \alpha \boldsymbol{u} + \beta \\
\alpha &= M(\boldsymbol{q}) \\
\beta &= \hat{h}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})
\end{aligned} \tag{12}
$$

を構成し、$\boldsymbol{u}$ について

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u} &= \ddot{\boldsymbol{q}}_d + k_v \dot{\boldsymbol{e}} + k_p \boldsymbol{e} \\
\boldsymbol{e} &= \boldsymbol{q}_d - \boldsymbol{q}
\end{aligned} \tag{13}
$$

のサーボを用いることで、システムは

$$
\ddot{\boldsymbol{e}} + k_v \dot{\boldsymbol{e}} + k_p \boldsymbol{e} = 0 \tag{14}
$$

となり、関節角の目標軌道 $\boldsymbol{q}_d$ に誤差なく追従させることができる。

3.4 手先座標系での制御

マニピュレータに作業をさせたいとき、いちいち関節角空間での目標軌道を算出するのは面倒であり、手先座標系での目標軌道に追従させたいケースが多い。ここでは、(10) に対して手先座標系での制御を考える。

手先座標 $\boldsymbol{x}$ と関節角 $\boldsymbol{q}$ の関係から、(15) が成り立つ。ただし、ここで扱う範囲においてヤコビアン $J(\boldsymbol{q})$ は正則であるものとする。

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x} &= f(\boldsymbol{q}) \\
\rightarrow \dot{\boldsymbol{x}} &= J(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}} \\
\rightarrow \ddot{\boldsymbol{x}} &= J(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + \dot{J}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}} \\
\rightarrow \ddot{\boldsymbol{q}} &= J^{-1}(\boldsymbol{q})\left(-\dot{J}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}} + \ddot{\boldsymbol{x}}\right)
\end{aligned} \tag{15}
$$

この $\ddot{\boldsymbol{q}}$ を (10) に代入することにより、システムを (16) のように書き換えることができる。

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\tau} &= M(\boldsymbol{q})J^{-1}(\boldsymbol{q})\left(-\dot{J}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}} + \ddot{\boldsymbol{x}}\right) + \hat{h}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \\
&= M(\boldsymbol{q})J^{-1}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{x}} - M(\boldsymbol{q})J^{-1}(\boldsymbol{q})\dot{J}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}} + \hat{h}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})
\end{aligned} \tag{16}
$$

ここで、(12) と同様に考えて、

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\tau} &= \alpha \boldsymbol{u} + \beta \\
\alpha &= M(\boldsymbol{q})J^{-1}(\boldsymbol{q}) \\
\beta &= -M(\boldsymbol{q})J^{-1}(\boldsymbol{q})\dot{J}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}} + \hat{h}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})
\end{aligned} \tag{17}
$$

なる入力を作れば、

$$
\ddot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{u} \tag{18}
$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} &= \ddot{\boldsymbol{x}}_d + k_v \dot{\boldsymbol{e}} + k_p \boldsymbol{e} \\ \boldsymbol{e} &= \boldsymbol{x}_d - \boldsymbol{x} \end{aligned} \tag{19}$$

としてやれば、

$$\ddot{\boldsymbol{e}} + k_v \dot{\boldsymbol{e}} + k_p \boldsymbol{e} = 0 \tag{20}$$

が実現され、手先座標系での目標軌道 $\boldsymbol{x}_d$ に追従させることができる。

なお、(17) は式を整理すれば (21) である。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} &= M(\boldsymbol{q}) J^{-1}(\boldsymbol{q}) \left(-\dot{J}(\boldsymbol{q}) \dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{u} \right) + \hat{h}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \\ \boldsymbol{u} &= \ddot{\boldsymbol{x}}_d + k_v \dot{\boldsymbol{e}} + k_p \boldsymbol{e} \\ \boldsymbol{e} &= \boldsymbol{x}_d - \boldsymbol{x} \end{aligned} \tag{21}$$

3.5 分解速度法

線形制御を用いて、近似的に手先位置の静定制御を行う手法を紹介する。この手法は数学的に簡単（計算量が少なくてすむ）であるが、制御性能には制約がある。

マニピュレータの関節角変数 $\boldsymbol{q}$ と手先位置 $\boldsymbol{x}$ の間には、(22) なる関係が一般に成立する。

$$\boldsymbol{x} = f(\boldsymbol{q}) \tag{22}$$

いま、ある値 $\boldsymbol{x}_s$ と $\boldsymbol{q}_s$ の間に、$\boldsymbol{x}_s = f(\boldsymbol{q}_s)$ なる関係があるとき、$\boldsymbol{x}_s$ が $\delta\boldsymbol{x}$ だけ微小変化したとすると、

$$\boldsymbol{x}_s + \delta\boldsymbol{x} = f(\boldsymbol{q}_s + \delta\boldsymbol{q}) \tag{23}$$

なる関係となるはずである。これを近似的に

$$\boldsymbol{x}_s + \delta\boldsymbol{x} \simeq f(\boldsymbol{q}_s) + J(\boldsymbol{q}_s)\delta\boldsymbol{q} \tag{24}$$

と表すことにしよう。ここで $J(\boldsymbol{q}_s)$ が正則ならば、

$$\delta\boldsymbol{q} = J^{-1}(\boldsymbol{q}_s)\delta\boldsymbol{x} \tag{25}$$

なる関係が得られ、$\boldsymbol{x}$ の偏差と $\boldsymbol{q}$ の偏差を関係づけることができる。この近似が成立するならば、$\boldsymbol{q}_s$ 近傍で制御対象のシステムが (26) という特性を持っていると解釈できる。

$$\dot{\boldsymbol{q}} = J^{-1}(\boldsymbol{q}_s)\dot{\boldsymbol{x}} \tag{26}$$

ここで、$\dot{\boldsymbol{q}}$ をシステムへの入力と考え、新たな入力 $\boldsymbol{u}$ を用いて

$$\dot{\boldsymbol{q}} = J^{-1}(\boldsymbol{q}_s)\boldsymbol{u} \tag{27}$$

と表せば、(26) より $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{u}$ が得られる。これに対して、

$$\boldsymbol{u} = \dot{\boldsymbol{x}}_d + k_p(\boldsymbol{x}_d - \boldsymbol{x}) \tag{28}$$

とすれば、$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{x}_d - \boldsymbol{x}$ として $\dot{\boldsymbol{e}} + k_p \boldsymbol{e} = 0$ となり、位置誤差がゼロに収束する。以上をまとめれば (29) が得られる。

$$\dot{\boldsymbol{q}} = J^{-1}(\boldsymbol{q}_s)\left\{\dot{\boldsymbol{x}}_d + k_p(\boldsymbol{x}_d - \boldsymbol{x})\right\} \tag{29}$$

ここで求まった $\dot{\boldsymbol{q}}$ を新たに $\dot{\boldsymbol{q}}_d$ と考え、実際の $\boldsymbol{q}$ に対して $\dot{\boldsymbol{q}} = \dot{\boldsymbol{q}}_d$ が実現できれば、$\boldsymbol{q}_s$ 近傍で $\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{x}_d$ に収束する。

この手法は、近似が狭い範囲でしか成立しないという点に注意が必要である。

3.6 大きな減速比を持つシステム

マニピュレータの各関節には、減速歯車を介してモータが取り付けられている場合が多々ある。いま、モータの回転角を並べたベクトルを $\boldsymbol{q}_a$ と書くことにすると、マニピュレータの一般化座標 $\boldsymbol{q}$ との間には (30) が成り立つ。ここで G はギアの減速比を並べた行列である。

$$G\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}_a \tag{30}$$

一方、モータもそれ自身のダイナミクスを持っている。モータが出力するトルクを $\boldsymbol{\tau}_m$ とおくと、運動方程式は (31) と表せる。ここで $\boldsymbol{\tau}_a$ はマニピュレータへ伝達されるトルクである。モータについては M_a, D_a が定数であると期待できる。

$$\boldsymbol{\tau}_m = M_a \ddot{\boldsymbol{q}}_a + D_a \dot{\boldsymbol{q}}_a + \boldsymbol{\tau}_a \tag{31}$$

マニピュレータの運動方程式が (10) であるとすると、(30) と仮想仕事の原理から、

$$\boldsymbol{\tau} = G^T \boldsymbol{\tau}_a \tag{32}$$

が成立する。そこで、(31) の左から G^T を乗じると、(30)(31) から (33) を得る。

$$\begin{aligned} G^T\boldsymbol{\tau}_m &= G^T M_a \ddot{\boldsymbol{q}}_a + G^T D_a \dot{\boldsymbol{q}}_a + G^T \boldsymbol{\tau}_a \\ &= G^T M_a G \ddot{\boldsymbol{q}} + G^T D_a G \dot{\boldsymbol{q}} + M(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + \hat{h}(\boldsymbol{q},\, \dot{\boldsymbol{q}}) \\ &= \left\{G^T M_a G + M(\boldsymbol{q})\right\}\ddot{\boldsymbol{q}} + G^T D_a G \dot{\boldsymbol{q}} + \hat{h}(\boldsymbol{q},\, \dot{\boldsymbol{q}}) \end{aligned} \tag{33}$$

これにモデルベース制御を適用すれば、モータのダイナミクスを考慮した制御則が得られる。

ところで、一般に G の要素は 1 以上の大きな値となっている。このことから、G が十分に大きい場合に限って (34) と近似することが考えられる。

$$\begin{aligned} G^T\boldsymbol{\tau}_m &= \left\{G^T M_a G + M(\boldsymbol{q})\right\}\ddot{\boldsymbol{q}} + G^T D_a G \dot{\boldsymbol{q}} + \hat{h}(\boldsymbol{q},\, \dot{\boldsymbol{q}}) \\ &\simeq G^T M_a G \ddot{\boldsymbol{q}} + G^T D_a G \dot{\boldsymbol{q}} \end{aligned} \tag{34}$$

すなわち、システムの運動方程式が (35) となり、マニピュレータの非線形性を無視して制御を行うことができる。

$$\boldsymbol{\tau}_m = M_a G \ddot{\boldsymbol{q}} + D_a G \dot{\boldsymbol{q}} \tag{35}$$

3.7 一定外乱と PID 制御

これまで、サーボ系については外乱が無く、(36) となるものと考えてきた。しかし実際には、このサーボ系に外乱が作用し、(37) となることが考えられる。

$$\ddot{e} + k_v \dot{e} + k_p e = 0 \tag{36}$$

$$\ddot{e} + k_v \dot{e} + k_p e = f_{dist} \tag{37}$$

ここでは、外乱が最も単純な場合、すなわち f_{dist} が定数である場合を考えてみよう。サーボ系が静止した状態（$\ddot{e} = \dot{e} = 0$）を考えると、(37) は (38) となり、定常偏差とよばれるサーボ誤差が残ってしまう。k_p が大きくなれば定常偏差は小さくなるが、これをゼロに近づけるためには非常に大きなゲインを設定せねばならず、現実的には不可能である。

$$\begin{aligned} k_p e &= f_{dist} \\ \rightarrow e &= \frac{f_{dist}}{k_p} \end{aligned} \tag{38}$$

この定常偏差を排除するために、(39) のようにサーボシステムに積分項を付加してみる。サーボシステムは (40) となる。

$$u = \ddot{x}_d + k_v \dot{e} + k_p e + k_i \int e dt \tag{39}$$

$$\ddot{e} + k_v \dot{e} + k_p e + k_i \int e dt = f_{dist} \tag{40}$$

ここで、$t < 0$ では $e(t) = 0$ としておく。(40) を微分すると (41) を得る。

$$e^{(3)} + k_v \ddot{e} + k_p \dot{e} + k_i e = \dot{f}_{dist} \tag{41}$$

f_{dist} は定数であるので、当然 $\dot{f}_{dist} = 0$ である。よって静止状態（$e^{(3)} = \ddot{e} = \dot{e} = 0$）において

$$\begin{aligned} k_i e &= 0 \\ \rightarrow e &= 0 \end{aligned}$$

が成り立ち、サーボ誤差をゼロにすることができる。この制御手法を PID 制御（比例・積分・微分制御）という。