

第11回講義内容

1. 生物の増減

1.1 一種類の生物の個体数の変化

Logistic 方程式

1.2 二種類の生物の個体数の変化

Lotka-Volterra方程式

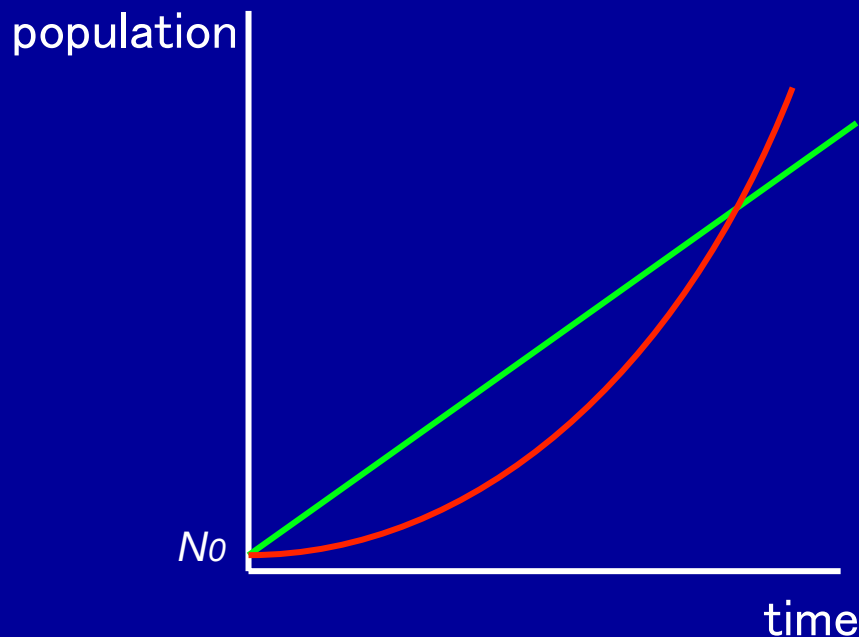
マルサスの人口論

マルサス(T.Malthus)は,「人口論(1798)」で,食料供給は線形的な増加なのに対して人口は指数的に増加し,いずれ破綻すると予測した.(幸いなことに予測ははずれている.)

$$\frac{dN}{dt} = rN$$

解

$$N = N_0 e^{rt}$$



ロジスティック(Logistic)関数

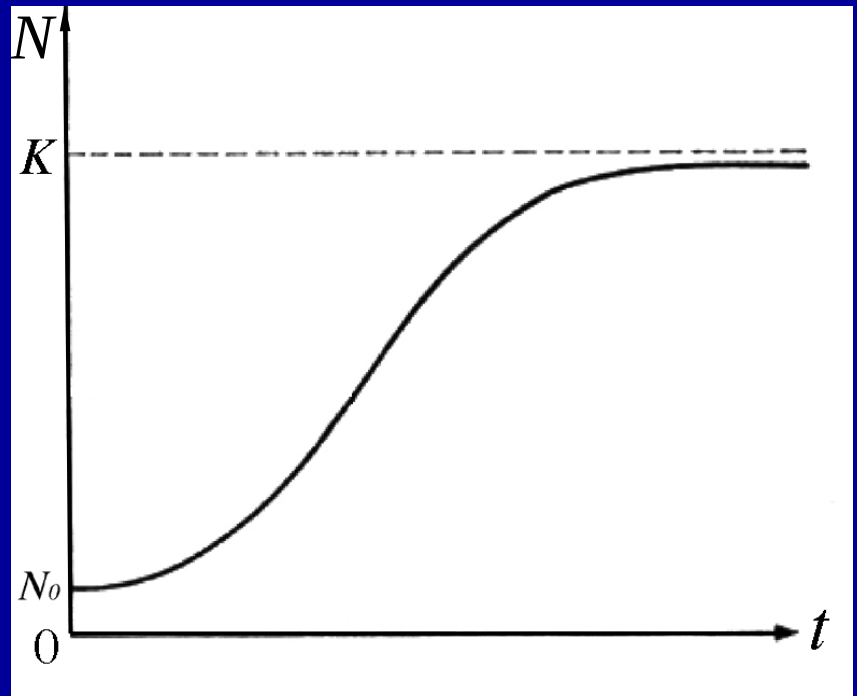
ベルハルスト(P.E. Verhulst)は, 1838年に次の人口モデルを提案した.

$$\frac{dN}{dt} = rN - \frac{r}{K} N^2$$

微分方程式の解

$$N = \frac{KN_0 e^{rt}}{N_0 e^{rt} + K - N_0}$$

N_0 : 初期値



シグモイド曲線(S字曲線)とも呼ばれている.

実際の人口は. . .

ベルハルストの人口モデルによる予測は外れている.

微生物の個体数変化

大腸菌や酵母菌など微生物の個体数増減は
ロジスティック関数でうまく表現できる.

昆虫の個体数の増減

内田の観察(1941)

周期的な増減が観察された.

繁殖活動に時間的な離散化の影響が伺える.

カオスとフラクタル, 山口昌哉(ブルーバックス)より

ロジスティック方程式の差分化

$$\frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} = rN(t) - \frac{r}{K} \{N(t)\}^2 = r \frac{\{K - N(t)\}}{K} N(t)$$

ここで

$$N(n\Delta t) = N_n \quad \text{とおくと} \quad N_{n+1} = \left\{ (1 + r\Delta t) - \frac{r\Delta t}{K} N_n \right\} N_n$$

$$\text{さらに} \quad x_n = \frac{r\Delta t N_n}{K(1 + r\Delta t)}, \quad a = (1 + r\Delta t) \quad \text{とおくと}$$

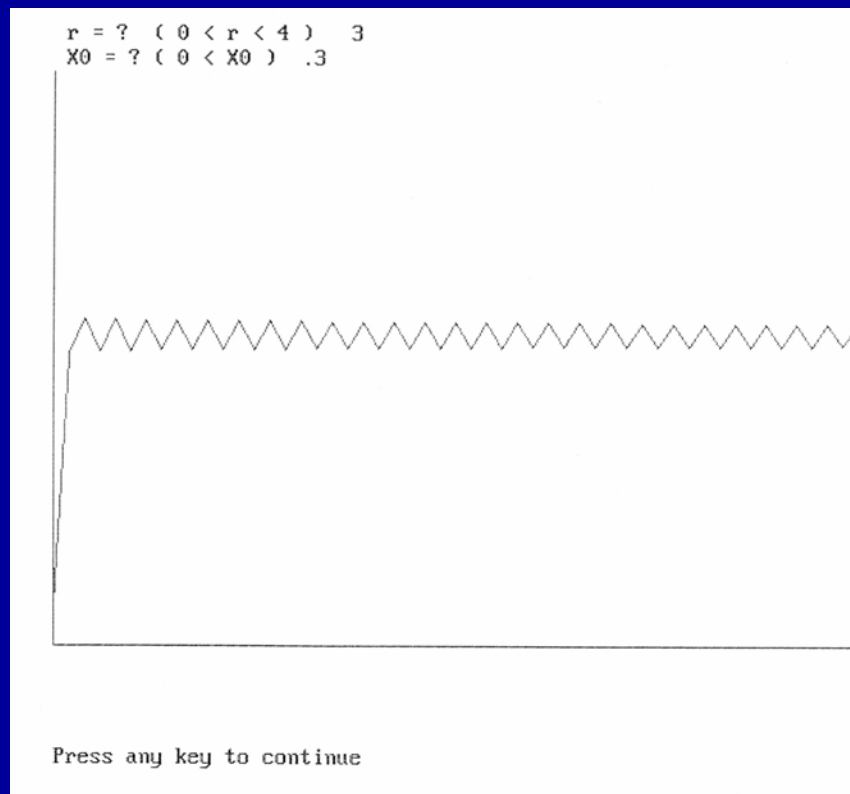
$$x_{n+1} = a(1 - x_n)x_n \quad 0 \leq a \leq 4, \quad 0 \leq x_0 \leq 1$$

(x_0 :初期値)

(離散力学系ともいう)

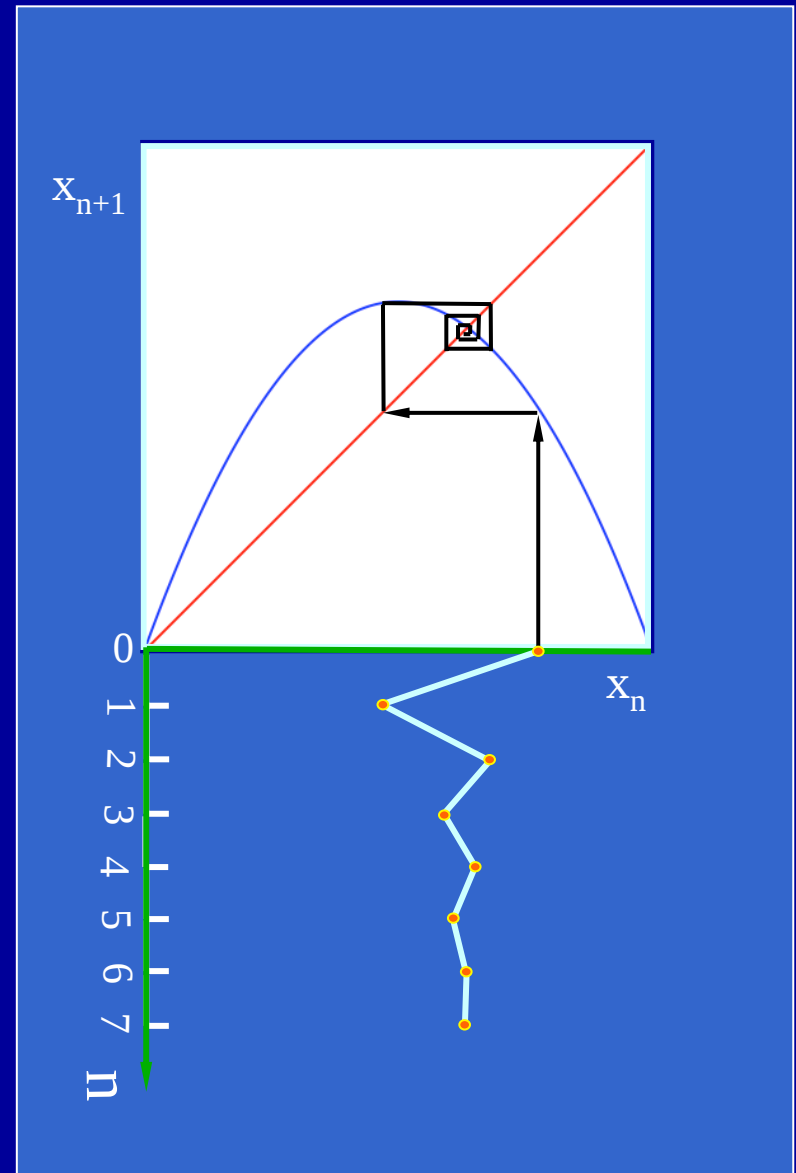
差分方程式の数値計算

$a = 3, x_0 = 0.3$ のとき



Cobwebbing method

離散力学系の安定性と挙動
が一目でわかる.



ウサギと山猫の統計資料

授業で配布

Lotka-Volterra 方程式

$$\frac{dx}{dt} = ax - bxy$$

$$\frac{dy}{dt} = -cy + dxy$$

1. ヤマネコがいなければ, ウサギは際限なく増える.
 2. ヤマネコの数にウサギの生存数に依存する.
 3. ヤマネコの数が増減は, ウサギとの遭遇に依存する.
 4. ヤマネコの増加率は捉えたウサギの量に比例する.
- (2'. ウサギがいないとヤマネコは一定の割合で減少する.)

定常状態付近の安定性評価

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y)$$

$$\frac{dy}{dt} = g(x, y)$$

定常状態を $(\bar{x}, \bar{y})$ とし, 定常状態からのほんの少し離れた場所の挙動を調べる.

$$x = \bar{x} + u$$

$$y = \bar{y} + v$$

$$\frac{du}{dt} = f(\bar{x} + u, \bar{y} + v) = f(\bar{x}, \bar{y}) + f_x(\bar{x}, \bar{y})u + f_y(\bar{x}, \bar{y})v + L$$

右辺第一項は定常状態
なのでともに0

$$\frac{dv}{dt} = g(\bar{x} + u, \bar{y} + v) = g(\bar{x}, \bar{y}) + g_x(\bar{x}, \bar{y})u + g_y(\bar{x}, \bar{y})v + L$$

線形化

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad \text{ここで} \quad J = \begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y})}$$

数値シミュレーション

差分化

$$\begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = g(x, y) \end{array} \quad \begin{array}{l} \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} \quad \begin{array}{l} \Delta x = f(x, y) \Delta t \\ \Delta y = g(x, y) \Delta t \end{array} \quad \begin{array}{l} \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} \quad \begin{array}{l} \Delta x_n = f(x_{n-1}, y_{n-1}) \Delta t \\ \Delta y_n = g(x_{n-1}, y_{n-1}) \Delta t \end{array}$$

初期値: (x_0, y_0)

下記の差分方程式を逐次計算する.

$$x_n = x_{n-1} + \Delta x_n$$

$$y_n = y_{n-1} + \Delta y_n$$

ルンゲクッタ法を用いれば数式に忠実な精度の高いシミュレーションができる. しかし生体挙動を忠実に表現することを保証するものではないことに注意

生態系管理

ウサギまたはヤマネコのどちらかの個体数が短期間に減少した(人為的な捕獲が行われた)場合, どんなことが起こるだろうか？