

第5回講義内容

1. 出席点の問題
2. 前回ホームワークの解説
3. 骨の形（長骨の半径と厚さに関する文献紹介）
4. 長骨の半径と厚さの最適性に関する理論
 - 4.1 曲げ強度を基準にしたモデル
 - 4.2 たわみを基準にしたモデル
 - 4.3 衝撃荷重を基準にしたモデル
5. ホームワーク（3つの基準による長骨の直径と厚さ）

出席点の問題

トガリネズミの鼓動は毎分約1000回であるのに対してゾウは30回程度である。この動物間の鼓動数の比がスケーリングの考え方から説明できることを示せ。ただし、トガリネズミの体重は3グラム、ゾウは3トンとする。

(ヒントは講義で。)

第5回講義内容

1. 出席点の問題
2. 前回ホームワークの解説
3. 骨の形（長骨の半径と厚さに関する文献紹介）
4. 長骨の半径と厚さの最適性に関する理論
 - 4.1 骨強度を基準にしたモデル
 - 4.2 たわみを基準にしたモデル
 - 4.3 衝撃荷重を基準にしたモデル
5. ホームワーク（3つの基準による長骨の直径と厚さ）

配付資料の図

長骨の直径と厚さの関係

“BONES” by J.D.Currey

骨の厚さと直径の関係について

骨の機能

- ・ 身体を支える（支持機能）
- ・ 血液を造る（造血機能） ← 髄液が必要

骨の強度が同じなら材料（骨）は少ない方がよい。
パイプ状構造は曲げモーメントを支えるのに有効。



厚さが薄くて半径が大きいほど有利？

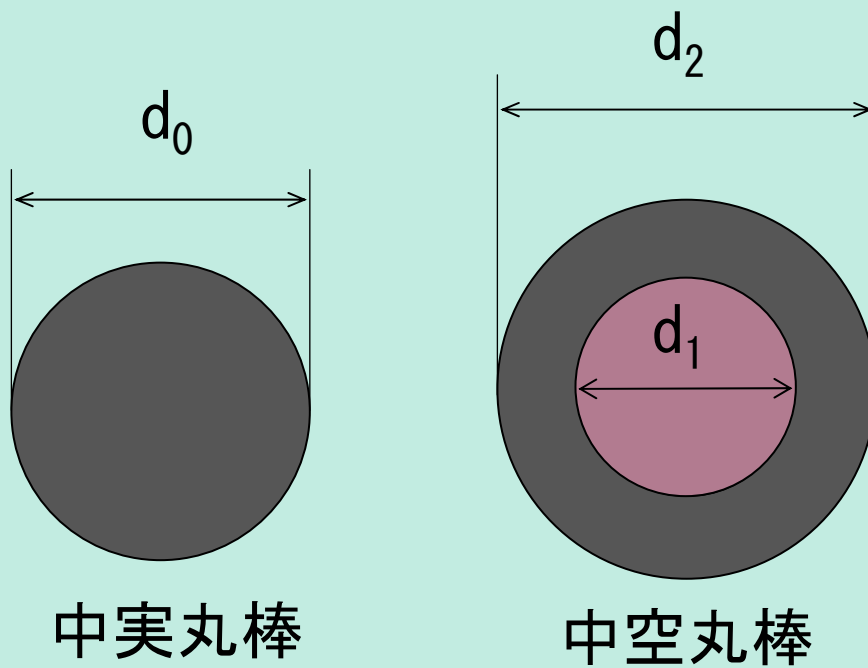
髄液の質量が影響するため必ずしも有利ではない。

（骨の密度/髄液の密度 $\div$ 2）

※長骨には適度な外径と内径の比が存在すると予想。

質量比較のモデル化

方針：構造体としての強度が同じという条件下で
中実丸棒を基準に中空丸棒の質量を比較.



■ 骨の密度 : ρ_c
■ 髄液の密度 : ρ_m

曲げ強度を基準にした場合

曲げモーメントによって発生する応力

$$\sigma = \frac{M}{Z}$$

ただし,

断面係数

$$\left(I_m = \frac{\pi}{64} (d_2^4 - d_1^4) \right)$$

中実の場合 : $Z_0 = I_0 / \left(\frac{d_0}{2} \right) = \frac{\pi}{32} d_0^3$

中空の場合 : $Z_m = I_m / \left(\frac{d_2}{2} \right) = \frac{\pi}{32} d_2^3 \left(1 - \left(\frac{d_1}{d_2} \right)^4 \right)$

強度を同じにする条件 $Z_0 = Z_m \quad \therefore d_0^3 = d_2^3 \left\{ 1 - \left(\frac{d_1}{d_2} \right)^4 \right\}$

中実に対する中空の質量比

$$\frac{M_m}{M_0} = \frac{\frac{\pi}{4} (d_2^2 - d_1^2) \rho_c + \frac{\pi}{4} d_1^2 \rho_m}{\frac{\pi}{4} d_0^2 \rho_c} \quad (\text{単位長さ当たり})$$

$$= \frac{\rho_c \left\{ 1 - \left(\frac{d_1}{d_2} \right)^2 \right\} + \rho_m \left(\frac{d_1}{d_2} \right)^2}{\rho_c \left\{ 1 - \left(\frac{d_1}{d_2} \right)^4 \right\}^{\frac{2}{3}}}$$

質量比が最小となる R/t

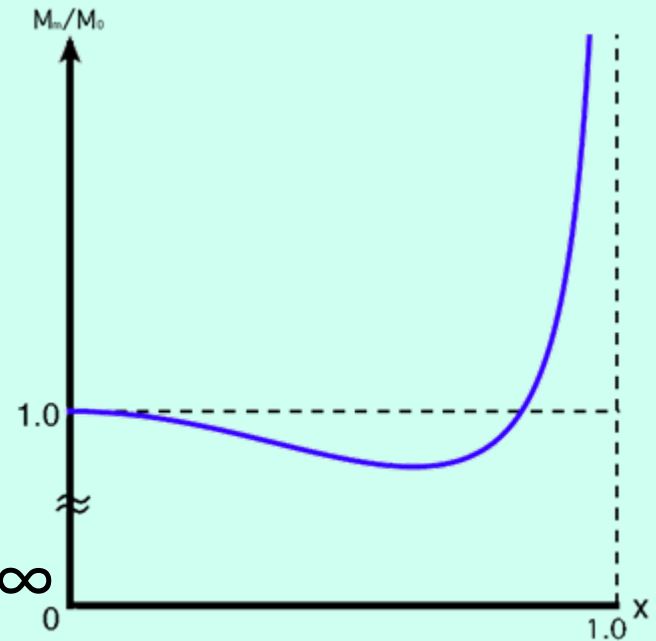
骨密度 $\rho_c=2$, 髄液の密度 $\rho_m=1$ とし, $d_1/d_2=x$ とおく.

$$\frac{M_m}{M_0} = \frac{2-x^2}{2(1-x^4)^{\frac{2}{3}}}$$

x は 0 から 1 の範囲で変化

$x=0$ (中実) で $M_m/M_0=1$

$x \rightarrow 1$ (極めて薄い中空) で $M_m/M_0 \rightarrow \infty$



質量比が最小となる x の値から R/t (外半径/厚さ) を計算せよ.

出席点 有効数字二桁程度

たわみ量を基準にした場合

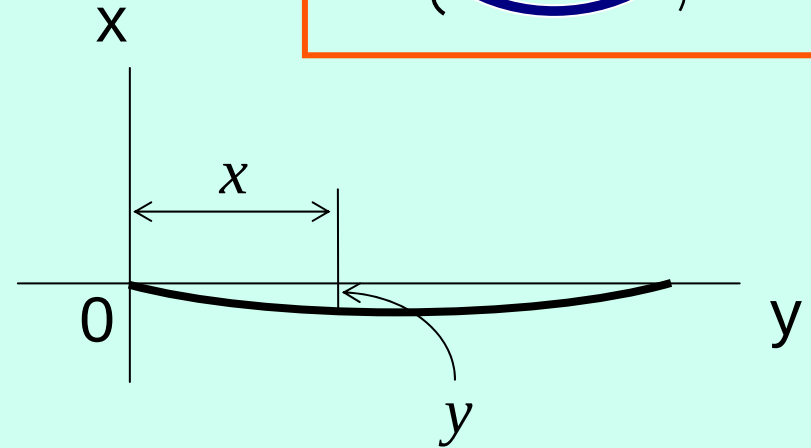
はりのたわみの方程式

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

$$\text{たわみ量} \propto I^{-1}$$

$$\therefore I_0 = I_m$$

$$d_0^4 = d_2^4 \left(1 - \left(\frac{d_1}{d_2} \right)^4 \right)$$



曲げモーメントの正方向



たわみ量を基準にした場合

$$\frac{M_m}{M_o} = \frac{\rho_c (d_2^2 - d_1^2) + \rho_m d_1^2}{\rho_c \sqrt{d_2^4 - d_1^4}}$$
$$= \frac{1 + \left(\frac{\rho_m}{\rho_c} - 1 \right) \left(\frac{d_1}{d_2} \right)^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{d_1}{d_2} \right)^4}}$$

$\rho_c = 2, \quad \rho_m = 1, \quad d_1/d_2 = x$ より

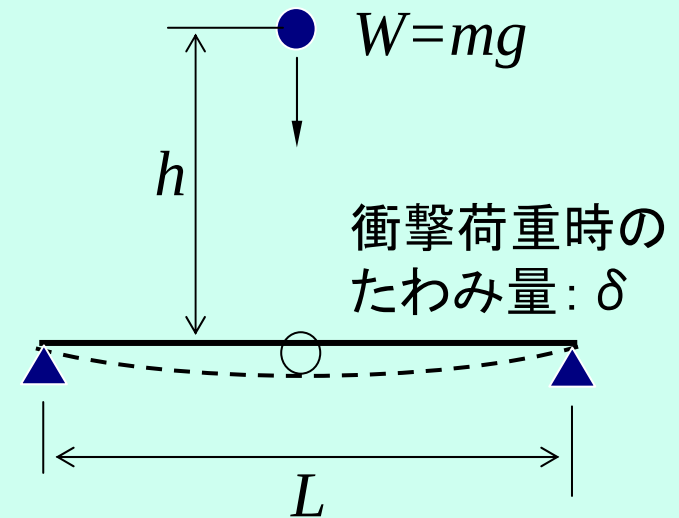
$$\frac{M_m}{M_o} = \frac{1 - 0.5x^2}{\sqrt{1 - x^4}}$$

衝撃荷重を基準にした場合

衝撃荷重で発生する応力値の見積り

位置エネルギーがはりの弾性エネルギーに全て変換された時が応力の最大値.

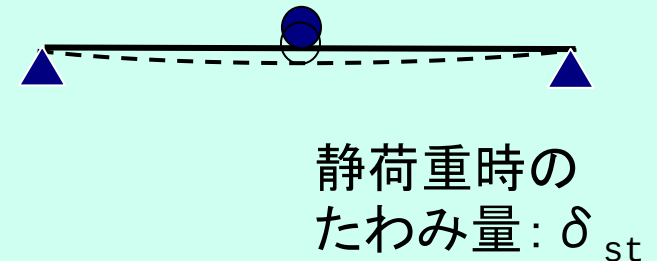
$$mg(h + \delta) \approx mgh = \frac{1}{2} k \delta^2$$



はりのばね定数 k は以下の関係より求まる.

$$W = mg = k \delta_{st}$$

$$\text{ここで } \delta_{st} = \frac{WL^3}{48EI}$$



衝撃荷重を基準にした場合

衝撃荷重時に発生する応力もたわみ量に比例して増大するので

$$\sigma = \frac{\delta}{\delta_{st}} \sigma_{st}$$

ここで静荷重時に発生する応力は $\sigma_{st} = \frac{M}{Z} = \frac{WL}{4} \frac{d}{2I}$

以上より衝撃荷重時の応力は以下のように見積もられる.

$$\sigma = \sqrt{\frac{6WhEd^2}{4LI}} \propto \frac{d}{\sqrt{I}}$$

したがって中実丸棒と中空丸棒に成立すべき条件式は

$$\frac{d_0}{\sqrt{I_0}} = \frac{d_2}{\sqrt{I_m}} \quad \text{ただし} \quad I_m = \frac{\pi}{64} (d_2^4 - d_1^4)$$

第5回講義内容

1. 出席点の問題
2. 前回ホームワークの解説
3. 骨の形（長骨の半径と厚さに関する文献紹介）
4. 長骨の半径と厚さの最適性に関する理論
 - 4.1 骨強度を基準にしたモデル
 - 4.2 たわみを基準にしたモデル
 - 4.3 衝撃荷重を基準にしたモデル
5. ホームワーク（3つの基準による長骨の直径と厚さ）