

第4回講義内容

1. 前回出席点の補足説明
2. フラクタルの説明（宿題の解説）
3. 枝分かれの法則
 - 3.1 樹木の枝分かれ（2.5乗則の復習）
 - 3.2 血管の3乗則
4. 血管の適応フィードバック
5. ホームワーク（血管の分岐角度）

樹木の枝の分岐則（2.5乗則）

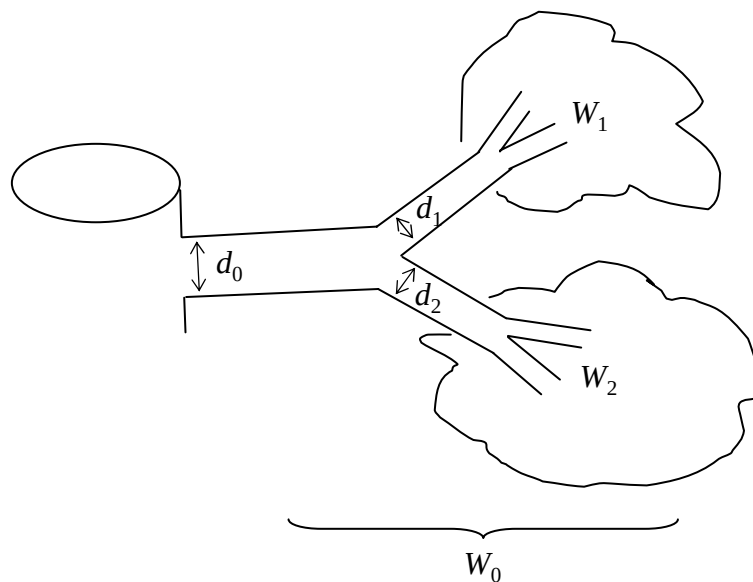
枝の重量と直径の関係

$$W \propto d^{2.5}$$

分岐した枝の関係

$$d_0^{2.5} = d_1^{2.5} + d_2^{2.5}$$

C.D.Murray(1927)



血管分岐の法則（3乗則）

$$r_0^n = r_1^n + r_2^n \quad n = 2.8 \sim 3.2$$

C.D.Murray(1927)

フラクタルモデルでは、 $n=2$ と仮定した。指数が2と3でどんな違いが出るのか。

$n=2$ ならば分岐後も同じ流速になる。

では、 $n=3$ の場合には分岐後の流速はどうなる？

フラクタルモデルでは2乗則ではなかったか？

血管分岐の法則（3乗則）

$$r_0^n = r_1^n + r_2^n \quad n = 2.8 \sim 3.2$$

C.D.Murray(1927)

血液供給は諸器官の活動を維持するのに必須.

→多すぎると無駄, 少なすぎると支障

→したがって生命維持には適度な血液流量が必要

→何らかの法則性が成立していると予想.

Murray の最小仕事モデル

基本的な考え方（一本の血管について考える）

- ・ 血管半径が小さすぎると
 - 粘性抵抗が増大 → 機械的エネルギーが増大. (not good)
 - 管内血液が減少 → 化学的エネルギーが減少. (good)
- ・ 血管半径が大きすぎると
 - 粘性抵抗が減少 → 機械的エネルギーが減少. (good)
 - 管内血液が増大 → 化学的エネルギーが増大. (not good)

※化学的エネルギー：血管内の血液を活性化させておくのに必要なエネルギー。管内血液量に比例（小さい方がよい）。

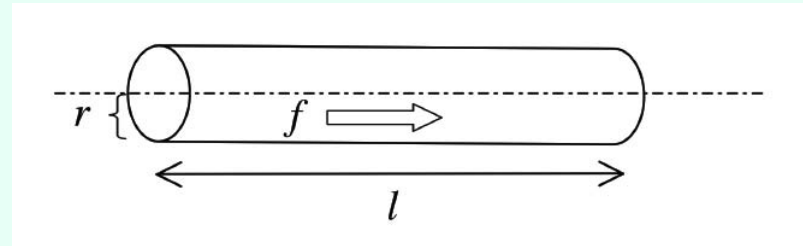
機械的エネルギー E_m と化学的エネルギー E_c の総和の最小化

Murray の最小仕事モデル（続き）

$$F = E_m + E_c = \Delta p f + kV \quad (k \text{ は定数})$$

$$f = \frac{\Delta p}{l} \frac{\pi r^4}{8\mu} \quad \text{より}$$

$$F = \frac{8\mu f^2 l}{\pi r^4} + k\pi r^2 l$$



仮定：血管内はポアズイユ流れ
（両端の圧力差を Δp とする．）

F の最小値を求めるために F を r で偏微分する
と以下の関係式が得られる．

$$\boxed{} = \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{k}{\mu}} = \text{const.}$$

←この計算が出席点

機械的エネルギー E_m

Δpf が単位時間当たりの機械的エネルギーに相当する理由

◎仕事は Fx で定義される.

◎断面積 A の管内の流体が Δt に Δx だけ押し出されている状況を考える.

入口側で液体に対してなされる仕事は $p_1 A \Delta x$.

出口側の面では, 圧力 p_2 が常に加わっている状態なので,
流体が外部に対して行う仕事は $p_2 A \Delta x$.

したがって, 管内で流体の運動に必要なエネルギーは

$$p_1 A \Delta x - p_2 A \Delta x = (p_1 - p_2) A \Delta x = \Delta p A \Delta x$$

単位時間あたりでは

$$\Delta p A \Delta x / \Delta t = \Delta p f$$

となる.



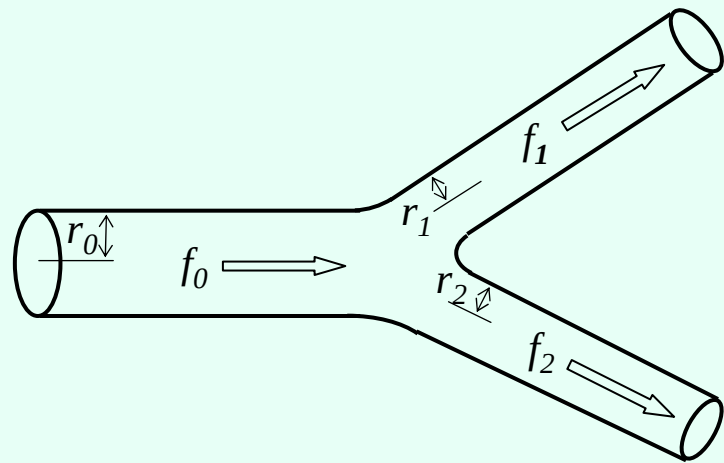
Murray の最小仕事モデル (続き)

入口側， 出口側の流量を f_0 , f_1 , f_2 とすると

$$\frac{f_0}{r_0^3} = \frac{f_1}{r_1^3} = \frac{f_2}{r_2^3}$$

$$f_0 = f_1 + f_2 \quad \text{より}$$

$$r_0^3 = r_1^3 + r_2^3$$



血管の適応フィードバック

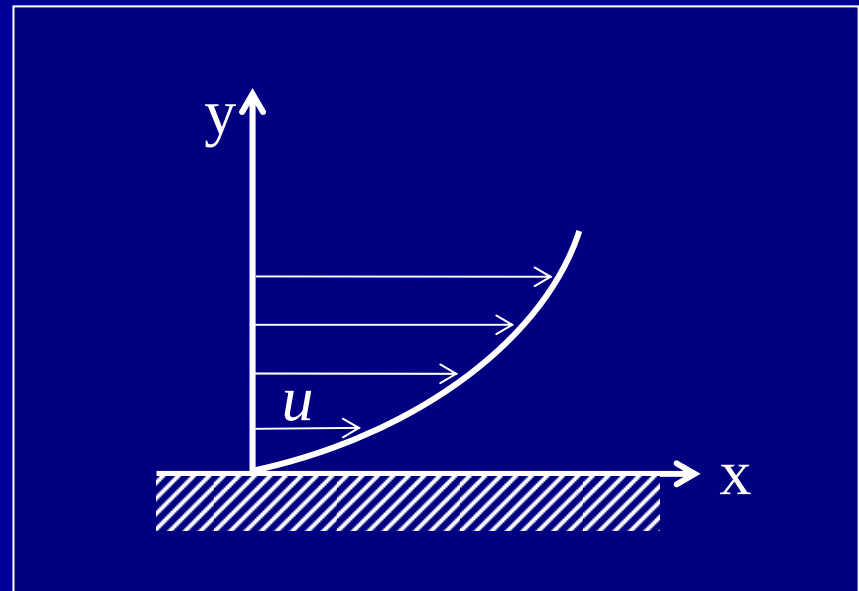
血管の3乗則は血管半径の大小を問わず成立.

→血管自身が血流を把握する機能があるはず.

→学説：血管内壁に作用するずり応力を検出（神谷ら，1980）

ずり応力

$$\tau = \frac{du}{dy} \cdot \mu$$

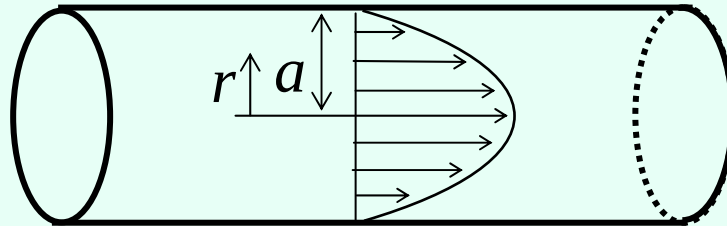


円管内ずり応力の導出

管内流れ $u = \left(-\frac{dp}{dx}\right) \frac{1}{4\mu} a^2 \left\{1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right\}$

$f = \left(-\frac{dp}{dx}\right) \frac{\pi a^4}{8\mu}$ の関係から

$$u = \frac{2f}{\pi a^2} \left\{1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right\}$$



$$\tau = \mu \left. \frac{du}{dr} \right|_{r=a} = \blacksquare$$

←この計算が出席点

(上図の座標の取り方に注意.)

第4回講義内容

1. 前回出席点の補足説明
2. フラクタルの説明（宿題の解説）
3. 枝分かれの法則
 - 3.1 樹木の枝分かれ（2.5乗則の復習）
 - 3.2 血管の3乗則
4. 血管の適応フィードバック
5. ホームワーク（血管の分岐角度）