生体工学第一

2008. 4. 16

第２回講義内容

１．出席点の問題

２．前回ホームワーク（英文和訳）の解説

３．前回講義の補足

４．0. 75乗則：熱放散による説明（前回の復習）

５．0. 75乗則：二つの学説

　5. 1　弾性相似則モデル

　5. 2　フラクタルモデル（次回に講義）

６．ホームワーク（釘のスケーリング）

出席点:
動物の走行速度は生物の大きさに依存しないのはなぜ？（もちろん走るのが苦手な動物もいるが．）

野ウサギ:70km/h, 2〜3 kg

チーター:100km/h，約50kg

人:36km/h以下, 70kg

クマ:約60km/h, 400kg

ゾウ:約25km/h,数千kg

第1回の宿題(英文和訳)の解説

復習

スケーリング（Scaling）

対象物の大きさによって，特性(移動速度，消費エネルギーなど)がどのように影響するかを探ること．対象物がどのように設計されているかという基本法則を知ることができる．

アロメトリー(allometry)：$y=ax^b$ で表される関係式が利用される．

アロメトリーの解釈の注意

体重が大きい方が寿命が長いか？

長寿の人は，一般にやせている人が多いように思う．
霊長類では，係数が異なると考えれば体重がある人の方が長生きになるのだろうか．

ほ乳類

$$t_{life} = 11.8 M_b^{0.20}$$

上式は種の間の関係を示しているが種内については対象外．
（人という同一の種で体重と寿命を議論することはできない．）

ちなみにチワワとセントバーナード犬では，チワワの方が長生きである．

生物に学ぶことは役にたつか？

URL: http://www.wbsj.org/birdwatching/contribution/97_910j.html

鋸（のこぎり）歯状の羽毛

五〇〇系電車の屋根上の翼型パンタグラフ

生物に学ぶことは役にたつか？

生物（いきもの）に学ぶことにより問題解決のための重要なヒントが得られる可能性がある．ただし，注目する現象を物理的観点から捉え，そこに隠されている原理を抽出する作業は不可欠である．（単にみかけをまねるだけでは恩恵は受けられない．）

第２回講義の本題

0.75乗則の説明するためのモデル

その前に基礎代謝率の復習

動物の代謝率：0.75乗則

生物の質量M_bと安静時の単位時間当たりの代謝エネルギーPとの間には，両対数軸上できれいな線形関係が成立している.

From *Scaling*,
K.S.Nielsen

基礎代謝率と生物の質量の関係

$$P \propto M_b^{0.75}$$

0.75乗則

単位質量あたりでは

$$P_u \propto M_b^{-0.25}$$

熱放散の考え方では指数はいくつになるか.

まず，生物の形を球体（半径 r）と仮定して指数を求める.

考え方：

生物の質量M_bはr^3に比例

身体から出る熱量は表面積Sに比例.（Sはr^2に比例）

単位時間当たりの熱量が基礎代謝率Pに比例.

PとM_bの関係から指数は. . .

生物の形を円柱と仮定したら0.75になるのでは？

結論：体表面積が最小となる条件下でも0.75乗則は説明できない.

どうやって0.75乗を説明するのか？

なるべく多くの動物に共通する現象で説明したい.

→　それが可能ならば，より説得力が出る.

→　学説として価値があると評価される.

「弾性相似則モデル」は何に注目したのか？

指数0.75の導出

McMahon （1973年）の学説

基本的な考えかた：

地上（重力下）で動物が体躯の形状を維持するには筋肉を活動させる必要があり，これが基礎代謝率に関係していると考える．（胴体が大きければ，筋肉の断面積も増えるが質量も増加する．胴体を弾性体と仮定すると，動物の胴体の長さと質量の間には，折れ曲がりにくさに関して相似的な関係があると予想される．）

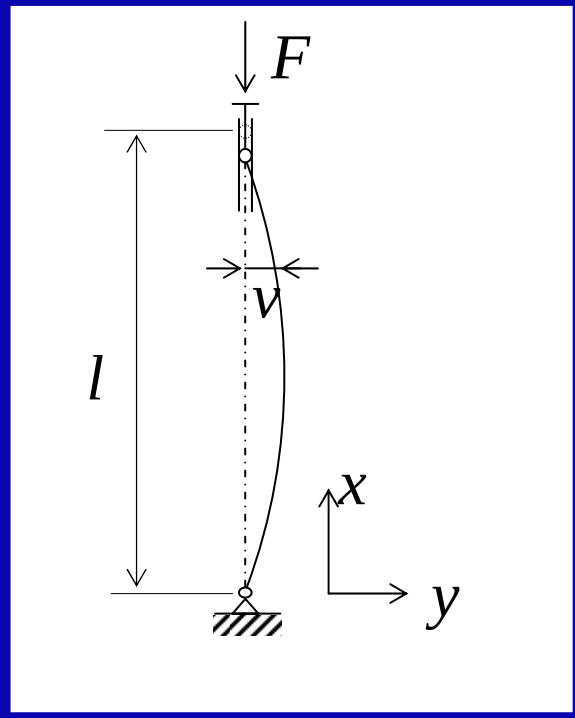
弾性相似則を適用

身体の折れ曲がりにくさを数式で表現

↓

弾性はりの座屈条件を利用

$$F = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$



E: ヤング率

I: 断面二次モーメント

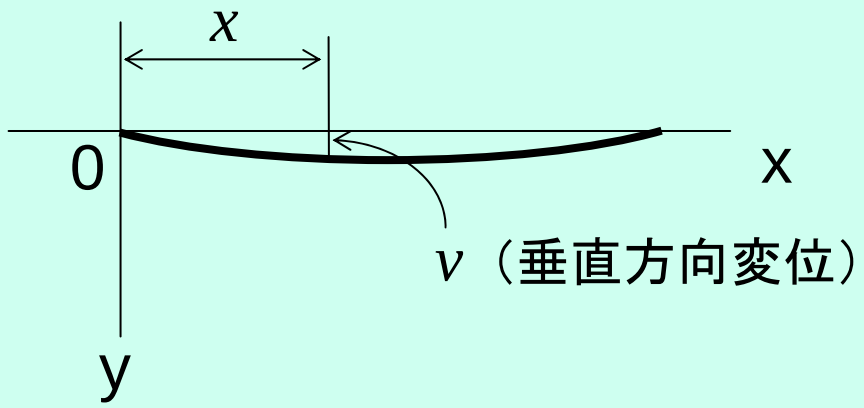
座屈条件の導出

はりのたわみの方程式

曲げモーメントの正方向

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

EI: 曲げ剛性



なぜ $\frac{d^2v}{dx^2}=\frac{M}{EI}$ となるのか？

軸線から y 離れた箇所でのひずみは　$\frac{y}{r}=\varepsilon$

応力は　$\sigma=E\varepsilon=\frac{y}{r}E$

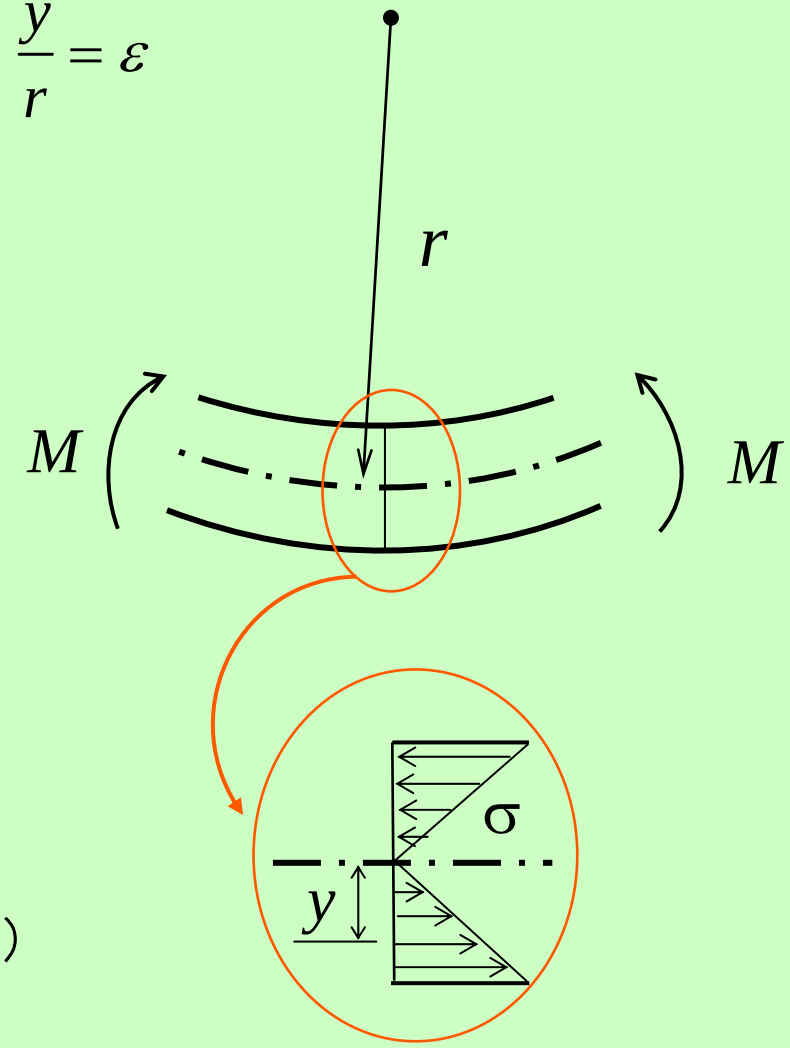
したがってモーメント M は

$$M=\int_A \sigma y dA=\frac{E}{r}\int_A y^2 dA=\frac{EI}{r}$$

一方，曲率半径の式は

$$\frac{1}{r}=\frac{\dfrac{d^2v}{dx^2}}{\left\{1+\left(\dfrac{dv}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}\approx\frac{d^2v}{dx^2}$$

（変形が小さい場合）

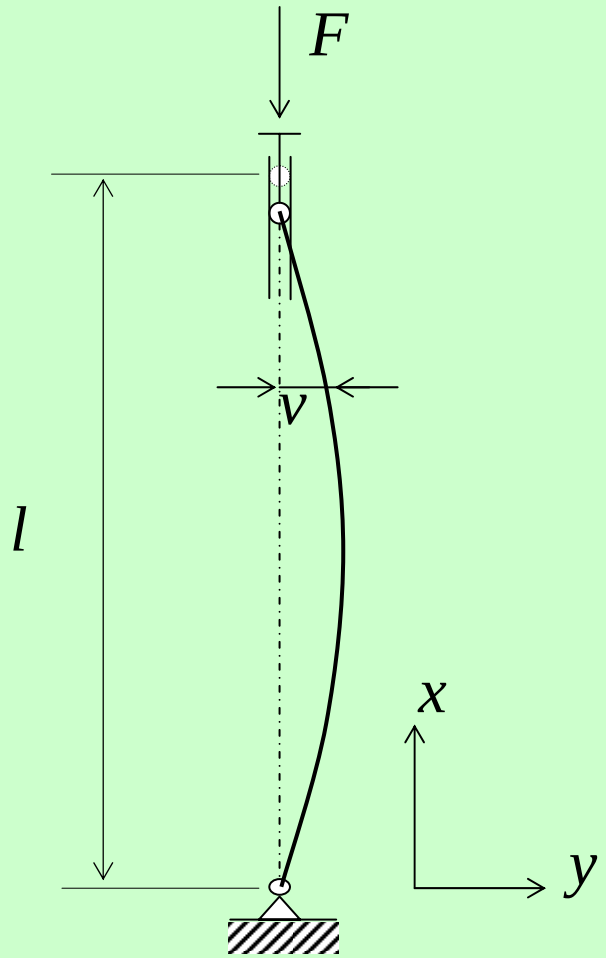


座屈条件の導出（続）

はりを縦方向にして考える

内力と外力とのつりあいの条件式を考えると，次式のようになる．

$$EI\frac{d^2v}{dx^2}+Fv=0$$



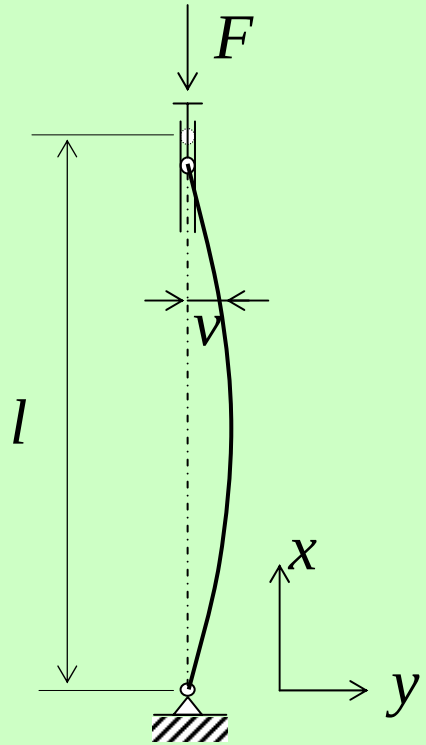
座屈条件の導出（続）

$$EI\frac{d^2v}{dx^2}+Fv=0$$

微分方程式の解

$$v=C_1\cos\alpha x+C_2\sin\alpha x$$

ここで　$\alpha=\sqrt{\frac{F}{EI}}$



境界条件

$x=0$ で $v=0$ → $C_1=0$

$x=l$ で $v=0$ → $C_2\sin\alpha l=0$.

2番目の境界条件で $C_2=0$ は意味がない.

→ $\alpha l=m\pi$（mは整数）が成立する必要がある.

$$F=m^2\frac{\pi^2EI}{l^2}$$

$m=1$ のときオイラーの座屈条件という.

弾性相似則（続き）

F は胴体の重量に比例すると仮定

$$F \propto \pi d^2 l \rho g$$

ρ : 見かけ上の密度

g : 重力加速度

d : 胴体の直径

座屈しない限界長さ l_k と直径 d の関係

$$l_k{}^3 \propto d^2$$

胴体質量（$l_k d^2$）は全体の質量 M_b に比例すると仮定すると

$$d \propto M_b{}^{\frac{3}{8}}$$

筋肉の活動

身体が座屈しないように胴体の筋肉が活動（収縮）する仕事量を見積もる.

筋肉の仕事量　$W \propto \sigma A \Delta l$

単位時間当たり　$P \propto \sigma A \dfrac{\Delta l}{\Delta t}$

σ :筋肉の単位面積あたりの収縮力

A :筋肉の断面積

Δl :収縮長さ

Δt :収縮時間

筋肉の収縮力，収縮速度は一定と仮定

$$P \propto M_b^{\frac{3}{4}}$$

0.75乗則を導き出すために必要な仮定

・基礎代謝量に重力が関与している.
（身体の姿勢を維持するエネルギーに関係）
・動物の胴体は弾性体で近似できる.
（材料が一様な円柱とみなすことができる. ）
・胴体の折れ曲がりにくさにオイラーの座屈条件を適用可能である.
・座屈条件の荷重は生物体の質量に比例する.
・筋肉の動作特性はどの動物も同じ.
・生物全体の質量は胴体の質量に比例.

0.75乗則：もう一つの学説

G.B.West, J.H.Brown and B.J.Enquist, Science, Vol.276, pp.122-126(1997)

次回の講義で紹介

第2回講義おわり