Navior Stokes方程式

質量保存の方程式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \boldsymbol{u} = 0$$

運動量保存の方程式

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \Delta \boldsymbol{u}$$

エネルギー方程式:　省略

対流＋音波伝播

1次元表示

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x}$$

粘性項:省略

音波の波動方程式

$$\rho = \rho_0 + \rho' \qquad u = u_0 + u' \quad (u_0 = 0)$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial u'}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u'}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right) \frac{\partial \rho'}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 u'}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right) \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} = 0$$

$$c_s^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_s$$

非圧縮性流体方程式

密度が一定の条件

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \Delta \boldsymbol{u}$$

Semi-Implicit 解法

一般的な流体の場合、音波の伝播速度は流速より非常に速く、十分時間がたつと非圧縮性の流れが実現される。

非圧縮性流体（十分長い時間スケールで）を解くために、音波の伝播速度に対する CFL 条件に制限されない Semi-Implicit 解法が必要となる。

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0$$

を満たすように圧力プロファイルが決定される。圧力にたいする Poisson 方程式を解くことにより、音波モードを捨てることができる。

MAC (Marker and Cell)法 (1/4)

2次元非圧縮性流体方程式： 規格化済

$$D = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \qquad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \qquad (2)$$

MAC (Marker and Cell)法 (2/4)

$$\frac{\partial}{\partial x}(1) + \frac{\partial}{\partial y}(2) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$
$$= -\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}\right) + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 D}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 D}{\partial y^2}\right)$$

MAC (Marker and Cell)法 (3/4)

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{D^{n+1} - D^n}{\Delta t} \rightarrow -\frac{D^n}{\Delta t} \quad \left(D^{n+1} = 0 \text{ を満足させる}\right)$$

Poisson 方程式

$$\frac{\partial^2 P^n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P^n}{\partial y^2} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(u^n\frac{\partial u^n}{\partial x} + v\frac{\partial u^n}{\partial y}\right)$$
$$-\frac{\partial}{\partial y}\left(u^n\frac{\partial v^n}{\partial x} + v\frac{\partial v^n}{\partial y}\right)$$
$$+\frac{D^n}{\Delta t} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 D^n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 D^n}{\partial y^2}\right)$$

MAC (Marker and Cell)法 (4/4)

Poisson 方程式を解いて求めた P を用いて、速度を修正する。

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t\left\{-u^n\frac{\partial u^n}{\partial x} - v^n\frac{\partial u^n}{\partial y} - \frac{\partial P^n}{\partial x} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 u^n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^n}{\partial y^2}\right)\right\}$$

$$v^{n+1} = v^n + \Delta t\left\{-u^n\frac{\partial v^n}{\partial x} - v^n\frac{\partial v^n}{\partial y} - \frac{\partial P^n}{\partial y} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 v^n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v^n}{\partial y^2}\right)\right\}$$

SMAC法 (1)

■ 現時刻の $\boldsymbol{u}^n$, P^n から仮の $\bar{\boldsymbol{u}}$ を求める

$$\bar{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{u}^n + \Delta t\left(-\boldsymbol{u}^n\cdot\nabla\boldsymbol{u}^n - \nabla P^n + \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta\boldsymbol{u}^n\right)$$

$$\boldsymbol{u}^{n+1} = \bar{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{u}' \qquad P^{n+1} = P^n + P'$$

$$\boldsymbol{u}^{n+1} = \boldsymbol{u}^n + \Delta t\left(-\boldsymbol{u}^n\cdot\nabla\boldsymbol{u}^n - \nabla P^{n+1} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta\boldsymbol{u}^n\right)$$

$$= \bar{\boldsymbol{u}} - \Delta t\cdot\nabla P' \qquad (3)$$

SMAC法 (2)

(3) の発散を取って、

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u}^{n+1} = \nabla\cdot\bar{\boldsymbol{u}} - \Delta t\cdot\Delta P'$$

$$= 0$$

Poisson 方程式

$$\Delta P' = \frac{\nabla\cdot\bar{\boldsymbol{u}}}{\Delta t}$$

$$P^{n+1} = P^n + P'$$

楕円型方程式

代表例 : Poisson方程式

$$\Delta\phi = \rho$$

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = \rho \qquad \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = \rho \qquad \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = \rho$$

理工学における最も重要な方程式

- ■ 電磁気学の Maxwell 方程式
- ■ 非圧縮性ナビエ･ストークス方程式
- ■ 定常状態に至った拡散方程式(熱伝導方程式)

1次元Poisson方程式(1/3)

常微分方程式なので、殆ど数値計算する必要が無いが、
多次元への拡張を考えながら数値計算手法を示す。

$$\frac{\phi_{j+1} - 2\phi_j + \phi_{j-1}}{\Delta x^2} = \rho_j$$

1次元Poisson方程式(2/3)

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= 0 \\
\phi_1 - 2\phi_2 + \phi_3 &= \rho_2 \Delta x^2 \\
\phi_2 - 2\phi_3 + \phi_4 &= \rho_3 \Delta x^2 \\
\phi_3 - 2\phi_4 + \phi_5 &= \rho_4 \Delta x^2 \\
\cdots &= \cdots \\
\phi_{j-1} - 2\phi_j + \phi_{j+1} &= \rho_j \Delta x^2 \\
\cdots &= \cdots \\
\phi_{N-2} - 2\phi_{N-1} + \phi_N &= \rho_{N-1} \Delta x^2 \\
\phi_N &= 0
\end{aligned}$$

N x N の連立一次方程式

1次元Poisson方程式(3/3)

$$\begin{pmatrix}
1 & & & & & & \\
1 & -2 & 1 & & & & \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\
 & & 1 & -2 & 1 & & \\
 & & & \cdot & \cdot & \cdot & \\
 & & & & 1 & -2 & 1 \\
 & & & & & & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
\phi_1 \\ \phi_2 \\ \\ \phi_j \\ \\ \phi_{N-1} \\ \phi_N
\end{pmatrix}
= \Delta x^2
\begin{pmatrix}
\rho_1 \\ \rho_2 \\ \\ \rho_j \\ \\ \rho_{N-1} \\ \rho_N
\end{pmatrix}$$

線形代数でGaussの消去法などを学んだが、多次元Poisson方程式では、
行列の次元が大きすぎてそれらの手法を使うのは効率が非常に悪い。

係数行列の要素は、殆どがゼロであり、その情報をうまく使わないと膨大な計算時間を要する。

行列解法 (1/2)

直接法

- Gauss消去法
- LU分解法

- Advantage : 必ず解ける。
  (行列式がゼロに近いときを除く)
- Disadvantage : 計算時間とメモリーが膨大。

参考書 「行列計算ソフトウェア」 小国 力編著 丸善
「反復法テンプレート」

行列解法 (2 / 2)

緩和法

- Point Jacobi法
- Gauss-Seidel法
- SOR法
- ICCG法 (Incomplete Conjugate Gradient)
- BICGSTAB法 (Bi-conjugate Gradient Stabilized Method)
- GMRES法 (Generalized Minimum Residual)

■ Advantage : 計算時間とメモリーが少なくて済む。
■ Disadvantage : 必ず解けるとは限らない。
適用できる行列が限られる

緩和法 (1 / 5)

Point Jacobi法

計算の繰り返し数を n とし、n 回目の値と $n+1$ 回目の値が1つの値に収束して行くとき、

$$\phi_j^{n+1} = \frac{1}{2}\left(\phi_{j+1}^n + \phi_{j-1}^n - \Delta x^2 \rho_j\right)$$

は、Poisson 方程式の差分式になる。

初期値 ϕ_j^0 を適当に仮定して ϕ_j^1 を計算する。同様にして $\left|\phi_j^{n+1} - \phi_j^n\right| \le \varepsilon$ が満たされるまで計算を進めると、結果はPoisson方程式の解となる。

この計算プロセスの安定性を調べる必要がある。

Source Code 10

緩和法 (2 / 5)

Von Neuman 安定性解析

解の形を $\phi_j^n = \delta\phi^n e^{ikj\Delta x}$ と仮定：

$$\delta\phi^{n+1} / \delta\phi^n = \frac{1}{2}\left(e^{ik\Delta x} + e^{-ik\Delta x}\right) = \cos k\Delta x$$

から、この方法は安定である。

■ より収束を速めるために、緩和係数 (加速係数) ω を導入

$$\phi_j^{n+1} = (1-\omega)\phi_j^n + \omega\frac{1}{2}\left(\phi_{j+1}^n + \phi_{j-1}^n - \Delta x^2 \rho_j\right)$$

緩和法 (3 / 5)

Von Neuman 安定性解析

$$\delta\phi^{n+1} / \delta\phi^n = (1-\omega) + \omega\cos k\Delta x$$

となり、$0 \le \omega \le 1$ 範囲で安定である。$\omega = 1$ のときが最も $\delta\phi^{n+1} / \delta\phi^n$ が小さくなる。(Point Jacobi法で計算した ϕ^{n+1} を ϕ^n と100% 置き換えている。)

$\delta\phi^{n+1} / \delta\phi^n$ が小さいということは、解の変化が大きいということであり、数値解と正しい解との誤差を減少させる速度が大きい。

↓

収束の速度が大きい

緩和法 (4 / 5)

もっと速く収束させる方法は無いか？

1次精度風上差分のときの手法を思い出す。
j 番目の格子点で計算をしているとき、すでに $j-1$ で ϕ^{n+1} が計算されているなら、それを使う。

$$\phi_j^{n+1} = \frac{1}{2}\left(\phi_{j+1}^{n} + \phi_{j-1}^{n+1} - \Delta x^2 \rho_j\right)$$

これを Gauss-Seidel法 という。この方法にも 緩和係数 ω を導入できる。

Source Code 11

緩和法 (5 / 5)

$$\phi_j^{n+1} = (1-\omega)\phi_j^{n} + \omega\frac{1}{2}\left(\phi_{j+1}^{n} + \phi_{j-1}^{n+1} - \Delta x^2 \rho_j\right)$$

安定性解析の結果は、$\omega < 2$ について安定であるので、収束計算を加速するために、$1 < \omega < 2$ の値をとる。

SOR (Successive Over-relaxation) 法

収束が最も速くなるのは、Poisson方程式の場合 $\omega \approx 1.82$ であるが、他の楕円型方程式では成り立つとは限らない。

Source Code 12