

連続時間系フィルタの構成

- ◆フィルタの概要
- ◆状態変数型構成法
- ◆縦続接続型構成法
- ◆LCシミュレーション
- ◆周波数特性の自動調整

フィルタの概要

入力電圧： $v_{in}(t) \rightarrow V_{in}(s)$

出力電圧： $v_{out}(t) \rightarrow V_{out}(s)$

$$\text{伝達関数：} T(s) = \frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)}$$

複素正弦波 $V_{in}(s)|_{s=j\omega} = Ke^{j(\omega t + \phi)}$ とすると, $V_{out}(s)|_{s=j\omega}$ は

$$V_{out}(s)|_{s=j\omega} = T(j\omega)Ke^{j(\omega t + \phi)}$$

$$V_{out}(s)|_{s=j\omega}=T(j\omega)Ke^{j(\omega t+\phi)}$$

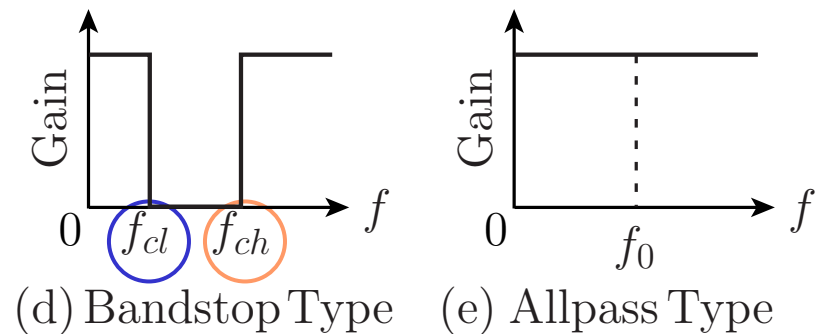
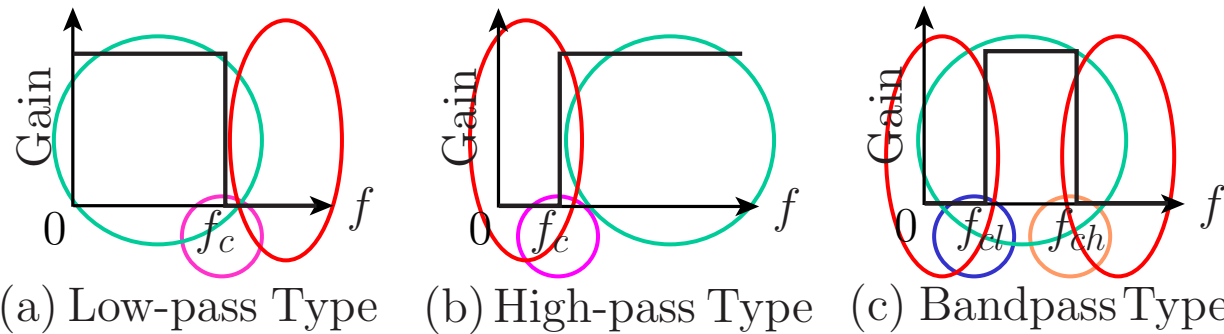
$$|V_{out}(s)|_{s=j\omega}|=|T(j\omega)|K$$

$$\arg V_{out}(s)|_{s=j\omega}=\arg T(j\omega)+\phi$$

$$A(\omega)=|T(j\omega)|: \text{ 振幅特性 }$$

$$\theta(\omega)=\arg T(j\omega): \text{ 位相特性 }$$

フィルタの種類



f_c : 遮断周波数

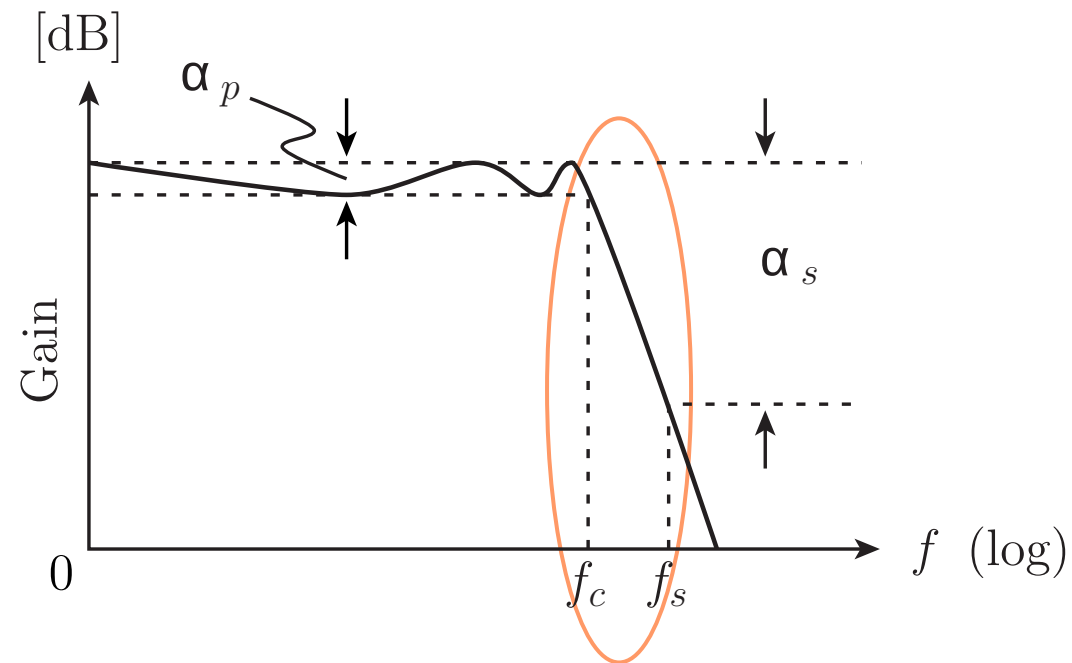
f_{cl} : 低域遮断周波数

f_{ch} : 高域遮断周波数

通過域または通過帯域

遮断域

実際のフィルタ特性



α_p : 通過域内許容偏差

α_s : 最小減衰量

f_s : 遮断域端周波数

$f_c \sim f_s$: 過渡域

フィルタの評価尺度

1. 歩留まり
2. 占有チップ面積
3. 消費電力
4. 電源電圧
5. ダイナミックレンジ(最大信号振幅, 雑音, 歪み)
6. 最大信号処理周波数(応答速度)
7. 電源電圧変動の除去率
8. その他

素子感度

F 目的関数(伝達関数)

x 素子値

$$\frac{\Delta F}{F} = S \frac{\Delta x}{x}$$

$$S = \frac{\Delta F}{F} \cdot \frac{x}{\Delta x} = \frac{x}{F} \cdot \frac{\Delta F}{\Delta x}$$

$$S_x^F = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} S = \frac{x}{F} \cdot \frac{\partial F}{\partial x}$$

相対素子感度

$|S_x^F|$: 小 $\rightarrow$ 高い歩留まり

状態変数型構成法

$$T_L(s) = \frac{Ka_n}{s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n} = \frac{V_{out}}{V_{in}}$$

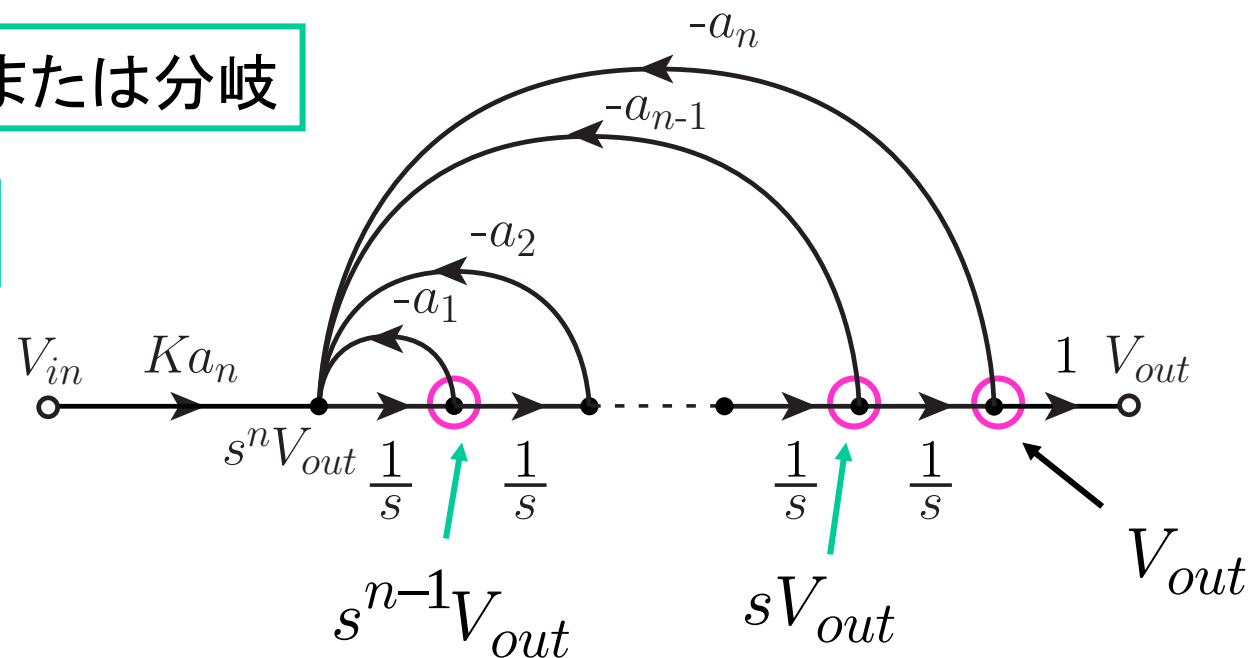
$$Ka_n V_{in} = (s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n) V_{out}$$

$$s^n V_{out} = Ka_n V_{in} - (a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n) V_{out}$$

$$s^n V_{out} = K a_n V_{in} - (a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n) V_{out}$$

黒丸：加算または分岐

矢印：乗算

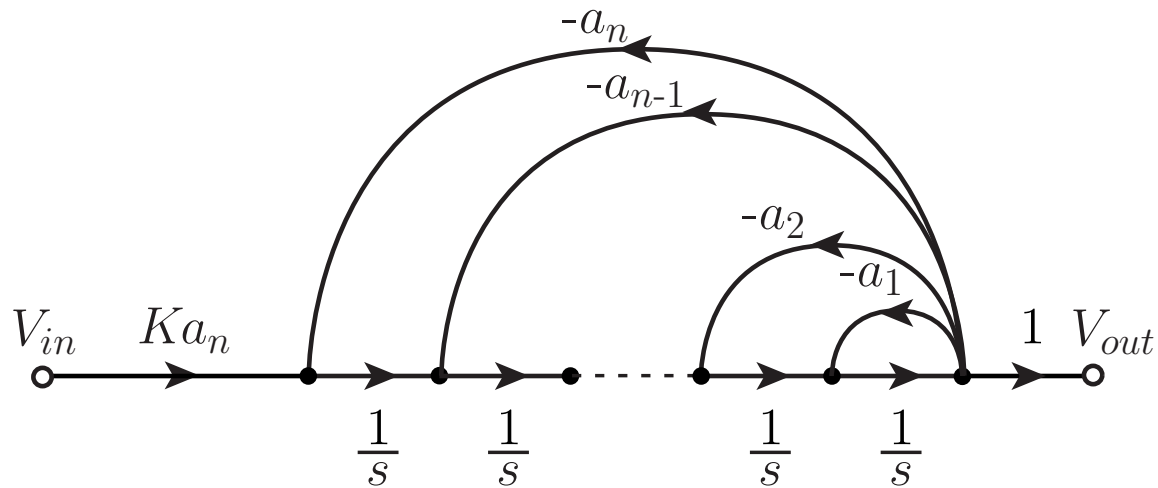


シグナルフロー
グラフ

別解

$$s^n V_{out} = K a_n V_{in} - (a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n) V_{out}$$

$$V_{out} = K a_n s^{-n} V_{in} - (a_1 s^{-1} + a_2 s^{-2} \dots + a_{n-1} s^{-n+1} + a_n s^{-n}) V_{out}$$

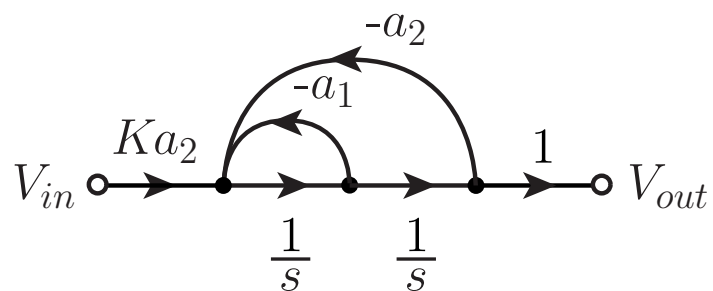


例題

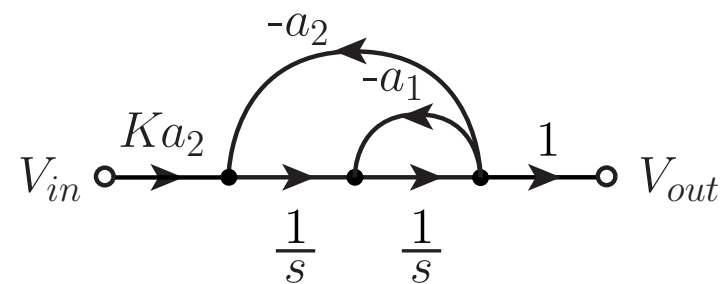
$$T_L(s) = \frac{Ka_2}{s^2 + a_1s + a_2} = \frac{V_{out}}{V_{in}}$$

$$s^2 V_{out} = Ka_2 V_{in} - (a_1 s + a_2) V_{out}$$

$$V_{out} = Ka_2 s^{-2} V_{in} - (a_1 s^{-1} + a_2 s^{-2}) V_{out}$$



(a)



(b)

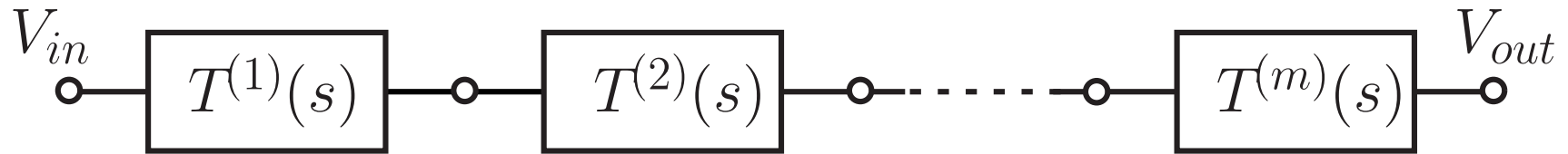
状態変数型構成法の問題点

伝達関数の係数の変化→特性の大幅な偏差

素子値の変化が伝達関数の係数の変化に対応

素子感度の高い構成

縦続接続型構成法



$$T(s) = T^{(1)}(s) T^{(2)}(s) \cdots T^{(m)}(s)$$

$T^{(i)}(s)$: 1次または2次の伝達関数

1次の伝達関数 → 受動RC回路

2次の伝達関数 → 2次区間回路

2次区間回路の伝達関数

$$T_{second}(s) = \frac{N(s)}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}$$

ω_0 : 遮断角周波数 (中心角周波数), Q : クオリティファクタ (単に Q)

$$N(s) = K \omega_0^2$$

: 低域通過フィルタ

$$N(s) = K \frac{\omega_0}{Q} s$$

: 帯域通過フィルタ

$$N(s) = K s^2$$

: 高域通過フィルタ

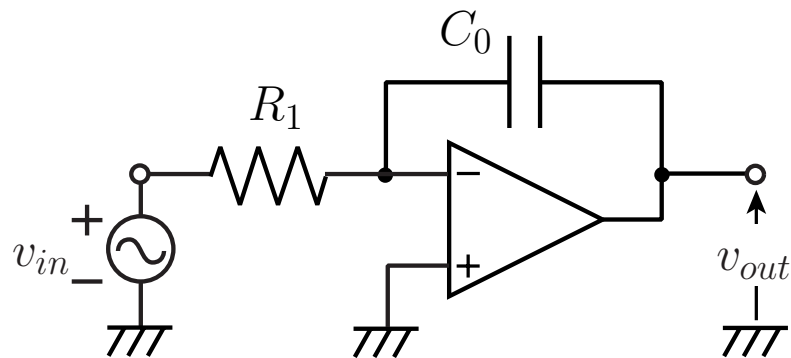
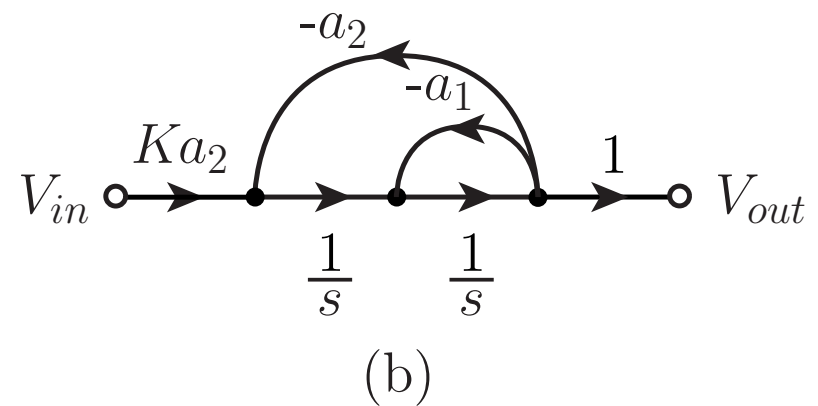
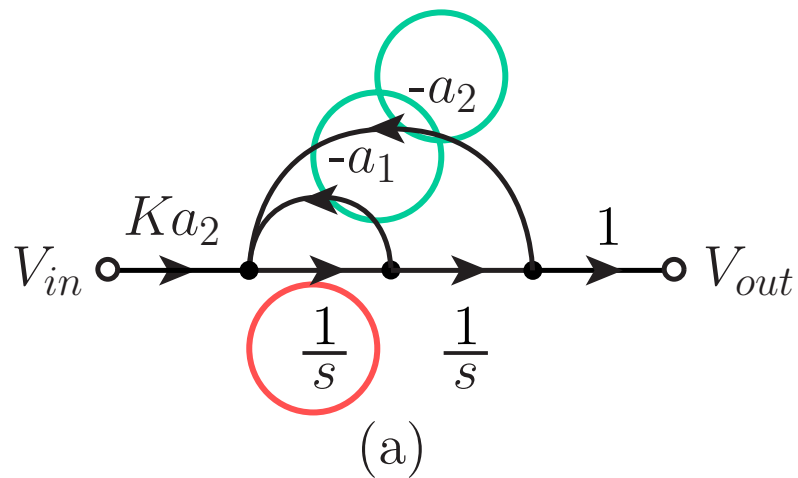
$$N(s) = K (s^2 + \omega_0^2)$$

: 帯域除去フィルタ

$$N(s) = K \left(s^2 - \frac{\omega_0}{Q} s + \omega_0^2 \right)$$

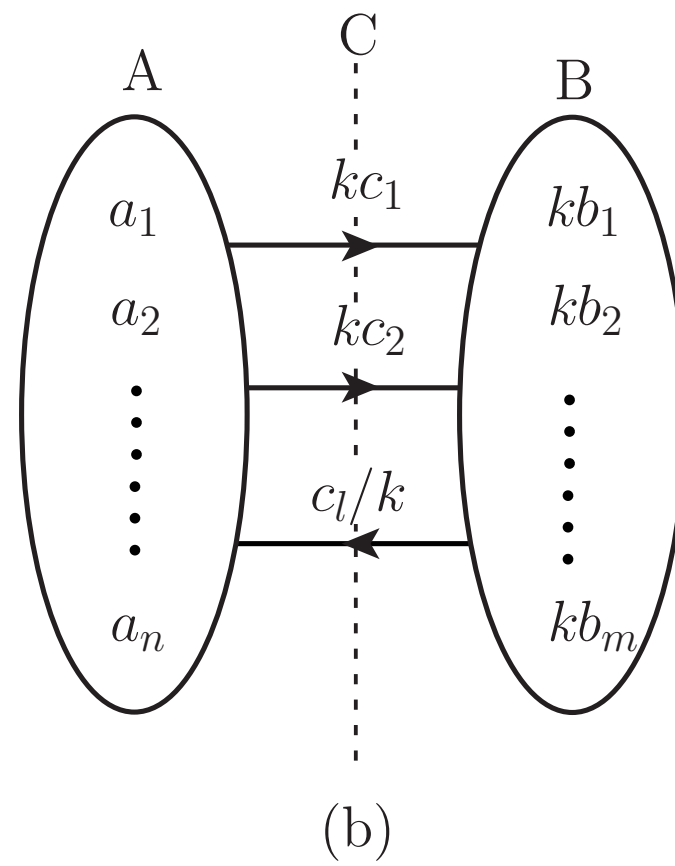
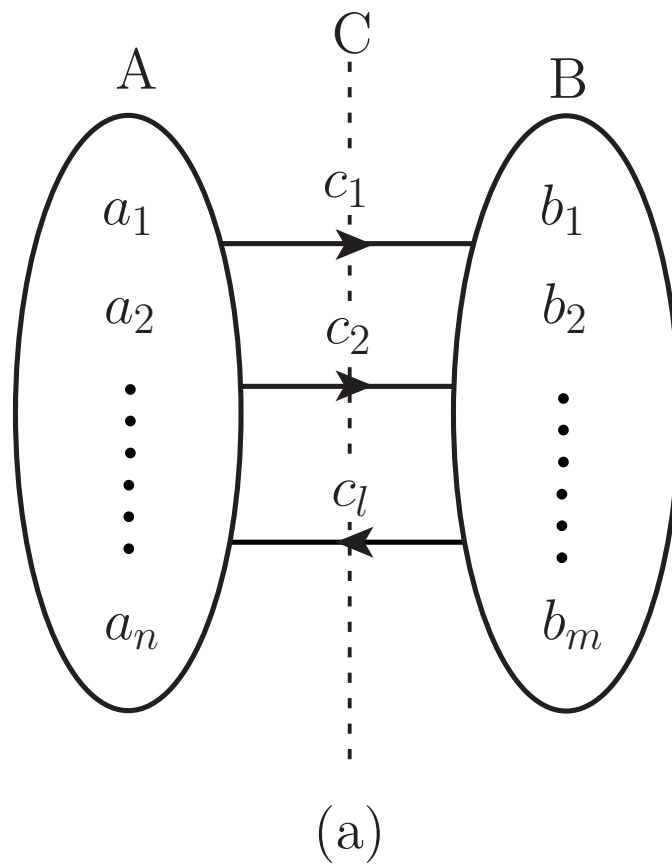
: 全域通過フィルタ

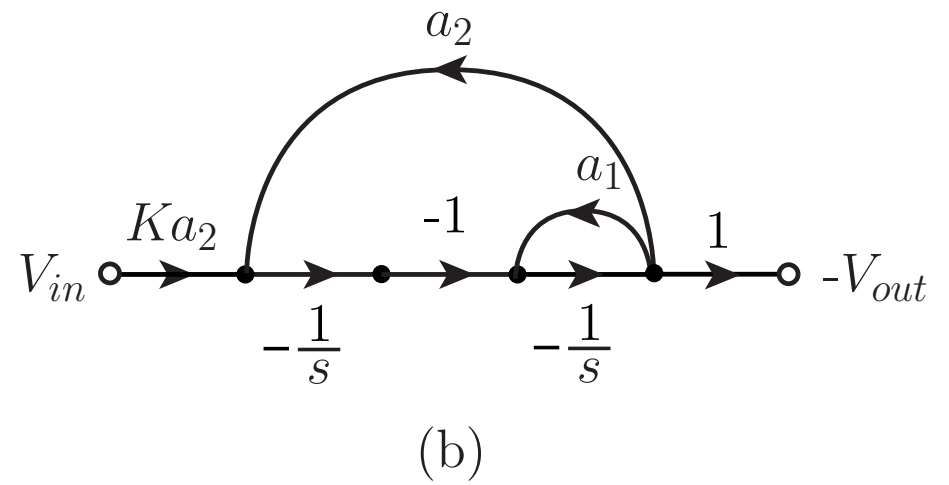
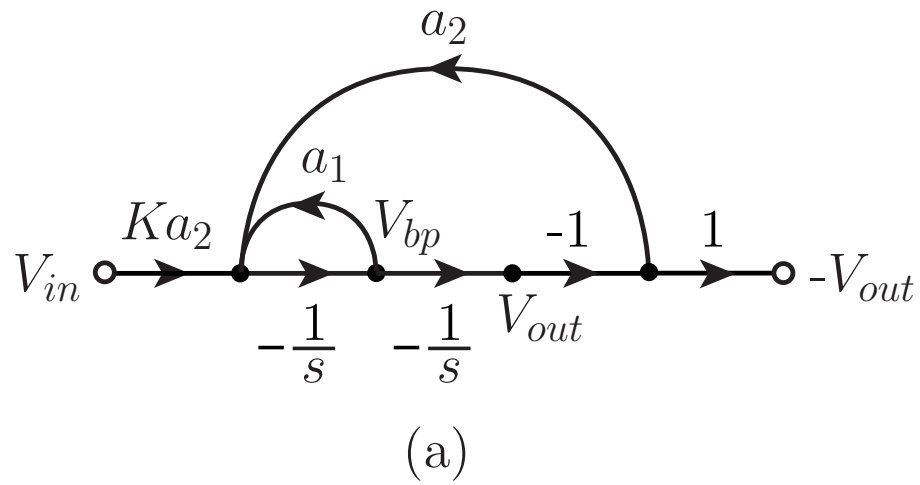
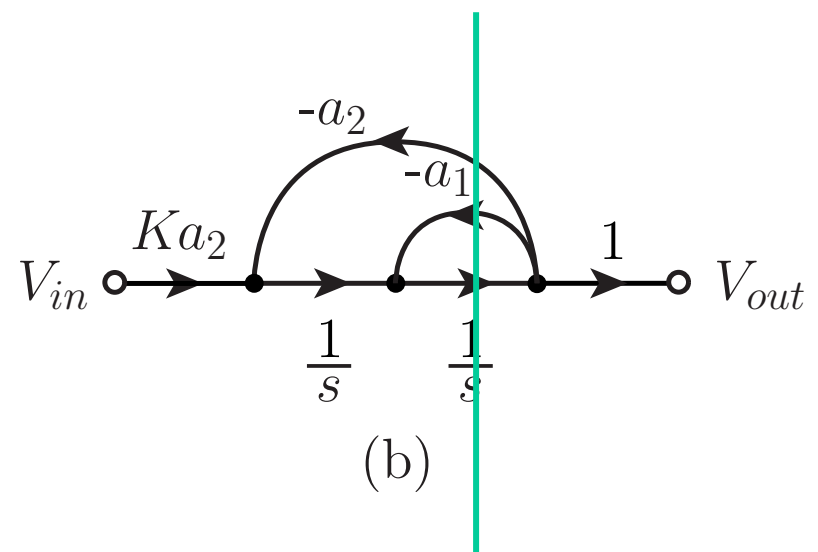
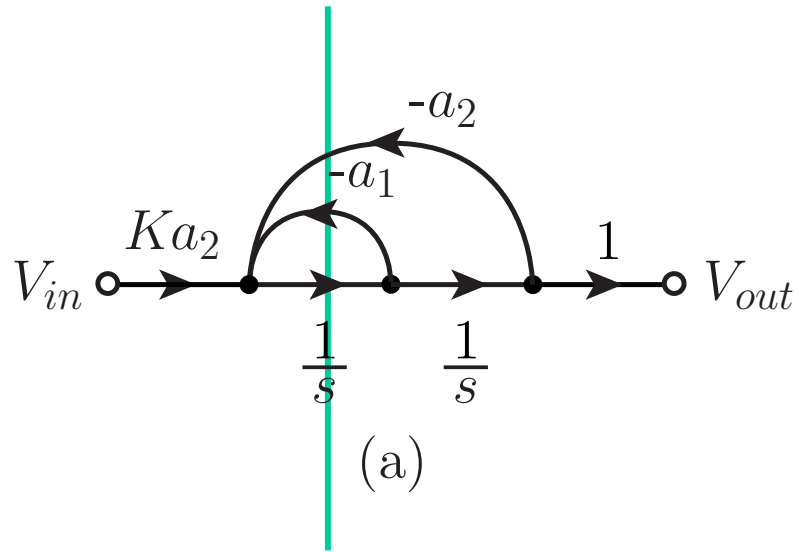
Tow-Thomasバイカッドフィルタ

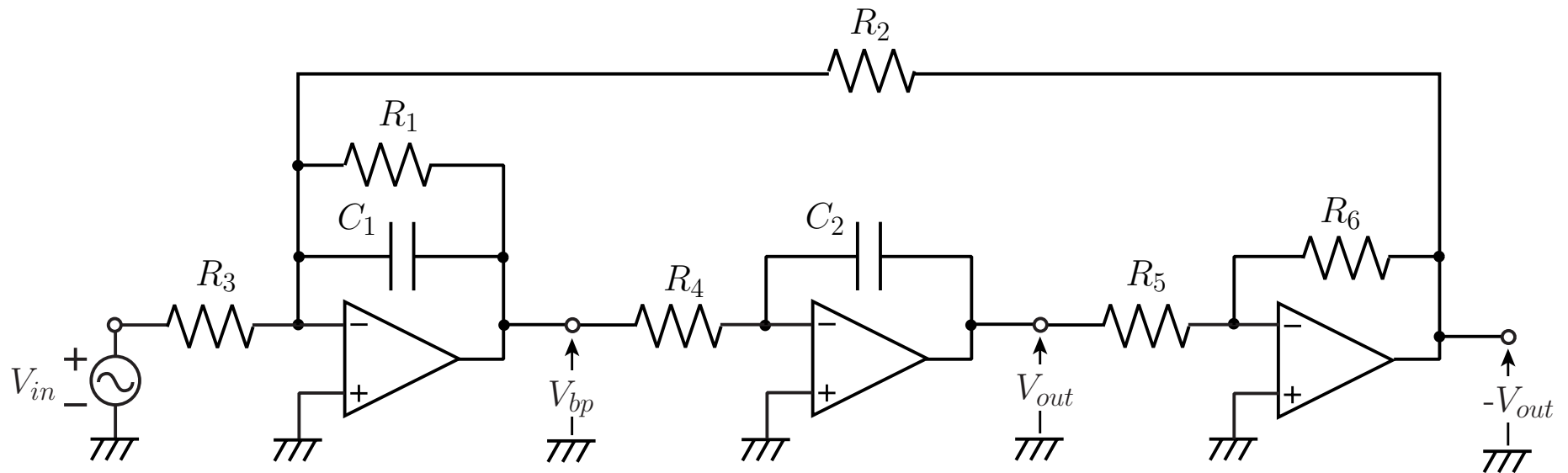
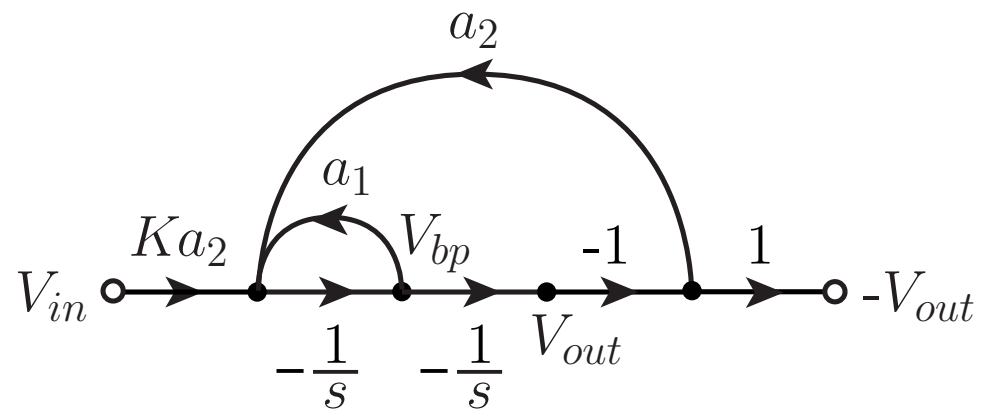


$$\frac{v_{out}}{v_{in}} = \frac{-1}{sC_0R_1}$$

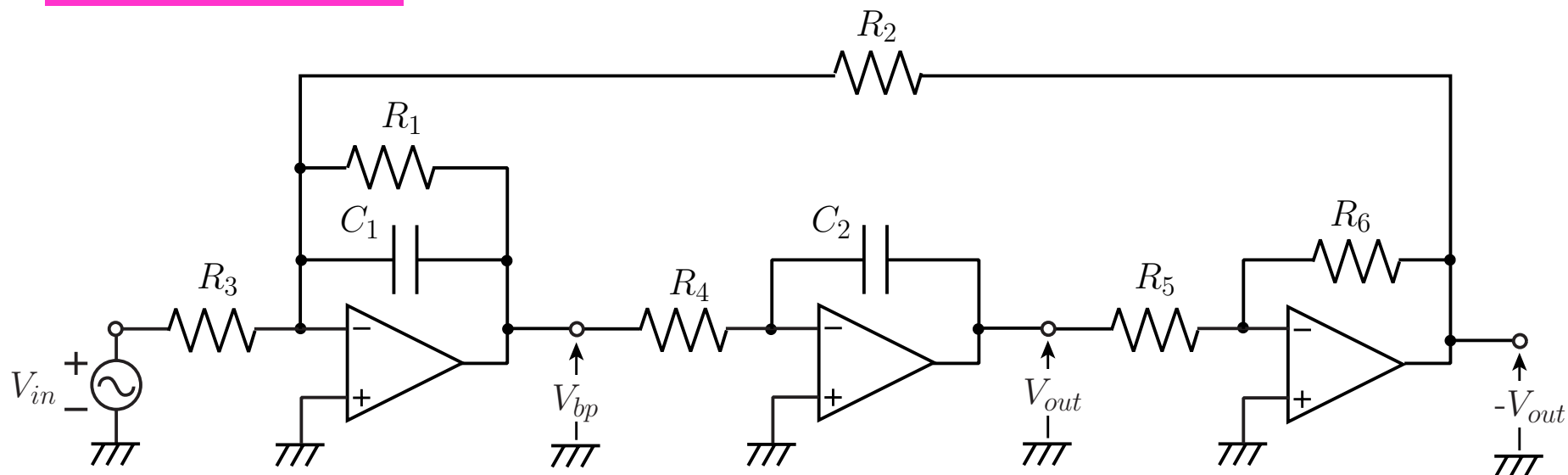
カットセット・スケーリング







素子値の決定



$$T_{biquad}(s) = \frac{1}{s^2 + \frac{1}{C_1 R_1} s + \frac{R_6}{C_1 C_2 R_2 R_4 R_5}}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{R_6}{C_1 C_2 R_2 R_4 R_5}}$$

$$Q = R_1 \sqrt{\frac{C_1 R_6}{C_2 R_2 R_4 R_5}}$$

$$K = \frac{R_2 R_5}{R_3 R_6}$$

例題

遮断周波数1kHzの2次振幅最大平坦特性

$$T(s) = \frac{K(2\pi \times 1000)^2}{s^2 + 2\sqrt{2}\pi \times 1000s + (2\pi \times 1000)^2}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{R_6}{C_1 C_2 R_2 R_4 R_5}} \quad Q = R_1 \sqrt{\frac{C_1 R_6}{C_2 R_2 R_4 R_5}} \quad K = \frac{R_2 R_5}{R_3 R_6}$$

$$R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = R_6$$

$$C_1 = C_2$$

$$\omega_0 = \frac{1}{C_1 R_2}$$

$$Q = \frac{R_1}{R_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

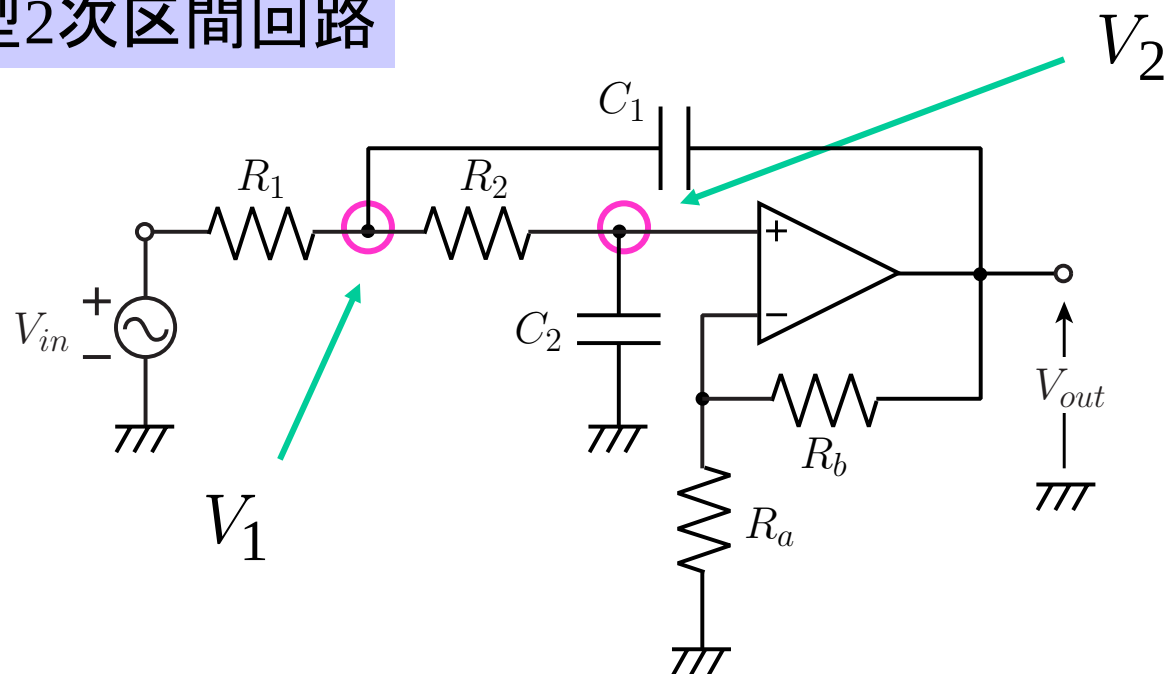
$$R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = R_6 = 10.0 \text{ k}\Omega$$

$$C_1 = C_2 = 15.9 \text{ nF}$$

$$R_1 = \frac{R_2}{\sqrt{2}} = 7.07 \text{ k}\Omega$$

$$K = 1.00$$

正帰還型2次区間回路



$$G_1(V_1 - V_{in}) + sC_1(V_1 - AV_2) + G_2(V_1 - V_2) = 0$$

$$G_2(V_2 - V_1) + sC_2V_2 = 0 \quad A = 1 + \frac{R_a}{R_b}$$

$$\begin{bmatrix} G_1 + sC_1 + G_2 & -sC_1A - G_2 \\ -G_2 & G_2 + sC_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1V_{in} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Cramerの公式

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,i-1} & y_1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,i-1} & y_2 & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,i-1} & y_n & a_{n,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

$$\begin{bmatrix} G_1+sC_1+G_2 & -sC_1A-G_2 \\ -G_2 & G_2+sC_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1V_{in} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V_2 = \frac{\begin{vmatrix} G_1+sC_1+G_2 & G_1V_{in} \\ -G_2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} G_1+sC_1+G_2 & -sC_1A-G_2 \\ -G_2 & G_2+sC_2 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{-(-G_2)(G_1V_{in})}{(G_1+sC_1+G_2)(G_2+sC_2)-(sC_1A+G_2)G_2}$$

$$V_{out}=AV_2 = \frac{AG_1G_2V_{in}}{s^2C_1C_2+sC_1G_2+sC_2(G_1+G_2)-sC_1G_2A+G_1G_2}$$

$$T_{sk}(s) = \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{AG_1G_2}{s^2C_1C_2 + sC_1G_2 + sC_2(G_1+G_2) - sC_1G_2A + G_1G_2}$$

$$= \frac{\frac{A}{R_1R_2}}{s^2C_1C_2 + s\frac{C_1(1-A)}{R_2} + sC_2\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) + \frac{1}{R_1R_2}}$$

$$T_{sk}(s) = \frac{\frac{A}{C_1C_2R_1R_2}}{s^2 + \frac{C_1R_1(1-A) + C_2R_1 + C_2R_2}{C_1C_2R_1R_2}s + \frac{1}{C_1C_2R_1R_2}}$$

例題

遮断周波数1kHzの2次振幅最大平坦特性

$$T(s) = \frac{K(2\pi \times 1000)^2}{s^2 + 2\sqrt{2}\pi \times 1000s + (2\pi \times 1000)^2}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{C_1 C_2 R_1 R_2}} \quad Q = \frac{\sqrt{C_1 C_2 R_1 R_2}}{C_1 R_1 (1-A) + C_2 R_1 + C_2 R_2} \quad K=A$$

$$(1) \quad R_1 = R_2 = R \quad C_1 = C_2 = C$$

$$\omega_0 = \frac{1}{CR} \quad Q = \frac{1}{3-A}$$

$$(2) \quad R_1 = R_2 = R \quad A=1$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{C_1 C_2} R} \quad Q = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{C_1}{C_2}}$$

(1)

$$C_1=C_2=15.9\text{nF}$$

$$R_1=R_2=\frac{1}{\omega_0 C}=10.0\text{k}\Omega$$

$$A=3-\frac{1}{Q}=3-\sqrt{2} \quad R_a=10.0\text{k}\Omega \quad R_b=5.86\text{k}\Omega$$

(2)

$$R_1=R_2=10.0\text{k}\Omega \quad A=1 \quad R_a=\infty \quad R_b=0\text{k}\Omega$$

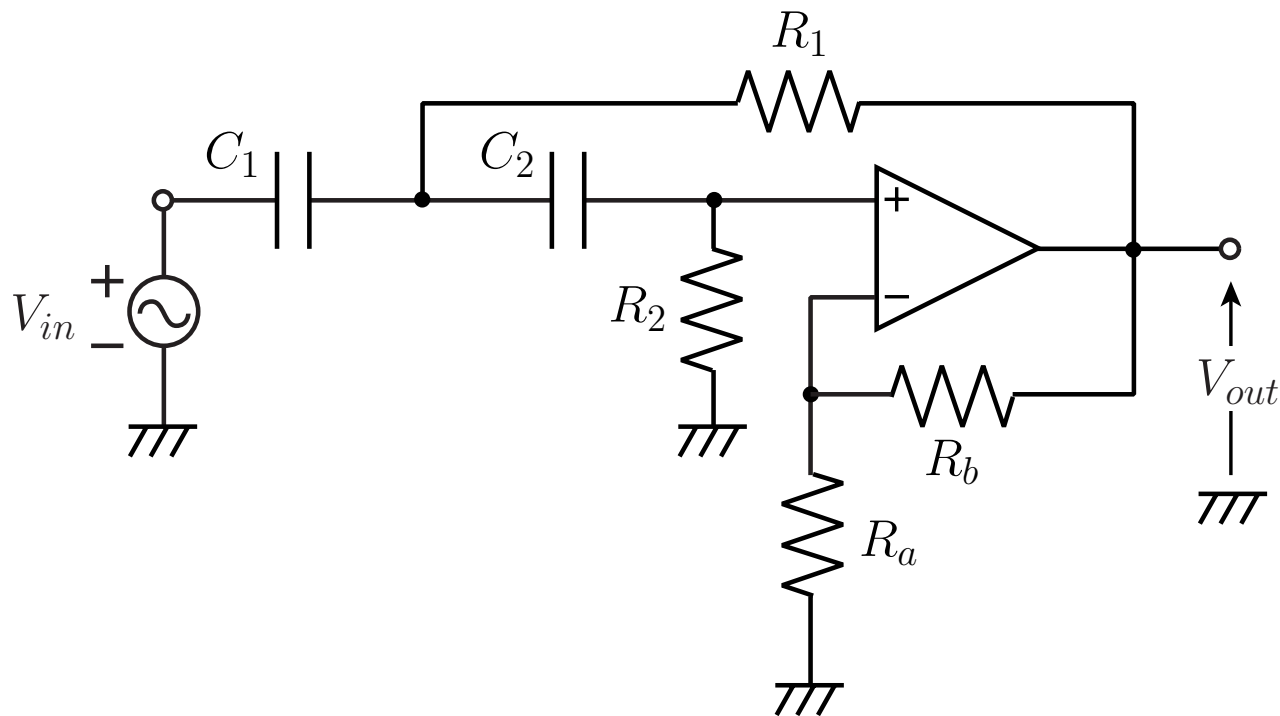
$$C_1=\frac{2Q}{\omega_0 R}=\sqrt{2}\times 15.9\text{nF}=22.5\text{nF}$$

$$C_2=\frac{1}{2Q\omega_0 R}=\frac{15.9\text{nF}}{\sqrt{2}}=11.2\text{nF}$$

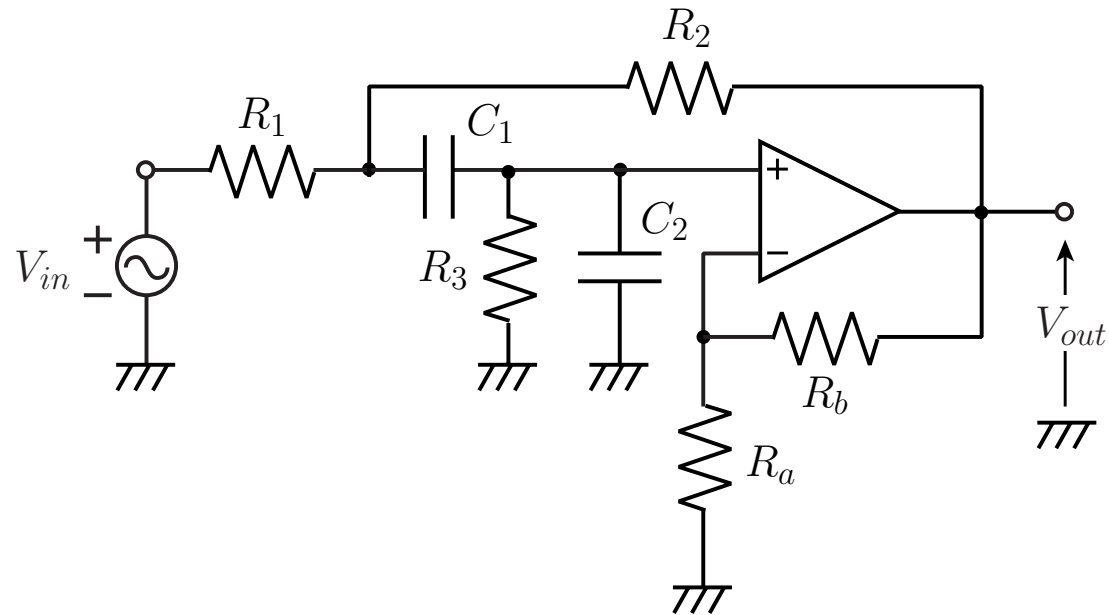
高域通過フィルタの構成

R_1, R_2 を容量に

C_1, C_2 を抵抗に



帯域通過フィルタの構成



$$\begin{bmatrix} G_1 + sC_1 + G_2 & -sC_1 - G_2A \\ -sC_1 & sC_1 + G_3 + sC_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 V_{in} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} G_1+sC_1+G_2 & -sC_1-G_2A \\ -sC_1 & sC_1+G_3+sC_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1V_{in} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} V_2 &= \frac{\begin{vmatrix} G_1+sC_1+G_2 & G_1V_{in} \\ -sC_1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} G_1+sC_1+G_2 & -sC_1-G_2A \\ -sC_1 & sC_1+G_3+sC_2 \end{vmatrix}} \\ &= \frac{-(-sC_1)(G_1V_{in})}{(G_1+sC_1+G_2)(sC_1+G_3+sC_2)-(sC_1+G_2A)sC_1} \\ &= \frac{sC_1G_1V_{in}}{s^2C_1C_2+sC_1(G_1+G_2+G_3-G_2A)+sC_2(G_1+G_2)+(G_1+G_2)G_3} \end{aligned}$$

$$V_2 = \frac{sC_1G_1V_{in}}{s^2C_1C_2 + sC_1(G_1 + G_2 + G_3 - G_2A) + sC_2(G_1 + G_2) + (G_1 + G_2)G_3}$$

$$T_{sk}(s) =$$

$$\frac{\frac{A}{C_2R_1}s}{s^2 + s \left\{ \frac{1}{C_1} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + \frac{1}{C_2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} \right) + \frac{1-A}{C_2R_2} \right\} + \frac{1}{C_1C_2R_3} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)}$$

例題

$$R_1=R_2=R_3=R \quad C_1=C_2=C$$

$$R=\frac{\sqrt{2}}{\omega_0 C}$$

$$A=5-\frac{\sqrt{2}}{Q}$$

$$K=\frac{5}{\sqrt{2}}Q-1$$

$$T(s)=\frac{K(2\sqrt{2}\pi\times 1000s)}{s^2+2\sqrt{2}\pi\times 1000s+(2\pi\times 1000)^2}$$

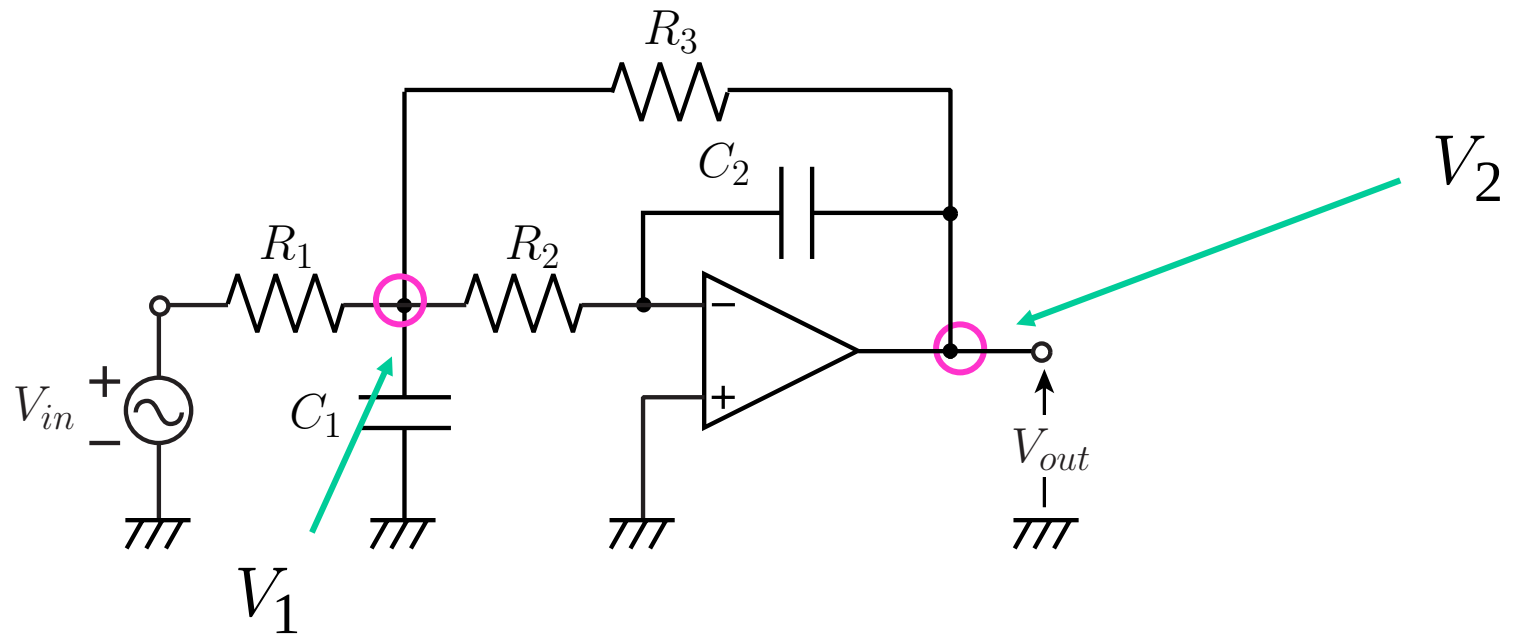
$C=15.9\text{nF}$ とすると

$$R=14.1\text{k}\Omega$$

$$A=3$$

$$R_a=14.1\text{k}\Omega \quad R_b=28.2\text{k}\Omega$$

負帰還型2次区間回路



$$G_1(V_1 - V_{in}) + sC_1V_1 + G_2V_1 + G_3(V_1 - V_2) = 0$$

$$G_2(0 - V_1) + sC_2(0 - V_2) = 0$$

$$\begin{bmatrix} G_1 + sC_1 + G_2 + G_3 & -G_3 \\ -G_2 & -sC_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1V_{in} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} G_1+sC_1+G_2+G_3 & -G_3 \\ -G_2 & -sC_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1V_{in} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} V_2 &= \frac{\begin{vmatrix} G_1+sC_1+G_2+G_3 & G_1V_{in} \\ -G_2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} G_1+sC_1+G_2+G_3 & -G_3 \\ -G_2 & -sC_2 \end{vmatrix}} \\ &= \frac{-(-G_2)(G_1V_{in})}{(G_1+sC_1+G_2+G_3)(-sC_2)-(-G_2)(-G_3)} \end{aligned}$$

$$V_{out}=V_2=\frac{-G_1G_2V_{in}}{s^2C_1C_2+sC_2(G_1+G_2+G_3)+G_2G_3}$$

$$T_{delly}(s) = \frac{-G_1 G_2 V_{in}}{s^2 C_1 C_2 + s C_2 (G_1 + G_2 + G_3) + G_2 G_3}$$

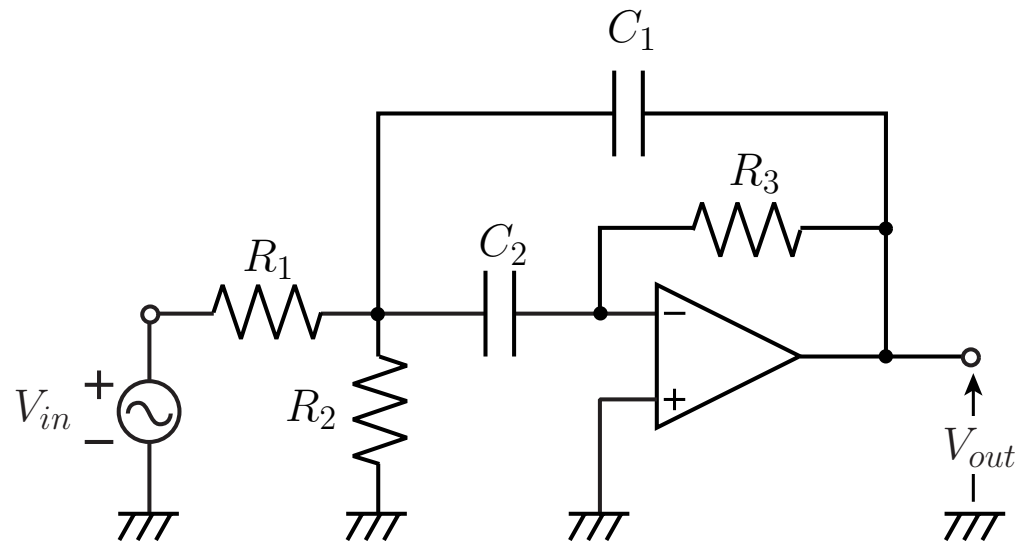
$$= \frac{-1}{s^2 + s \frac{1}{C_1} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) + \frac{1}{C_1 C_2 R_2 R_3}}$$

$$R_1 = R_2 = R_3 = R$$

$$C_1 = \frac{3Q}{\omega_0 R}$$

$$C_2 = \frac{1}{3Q \omega_0 R}$$

負帰還型2次帯域通過フィルタ

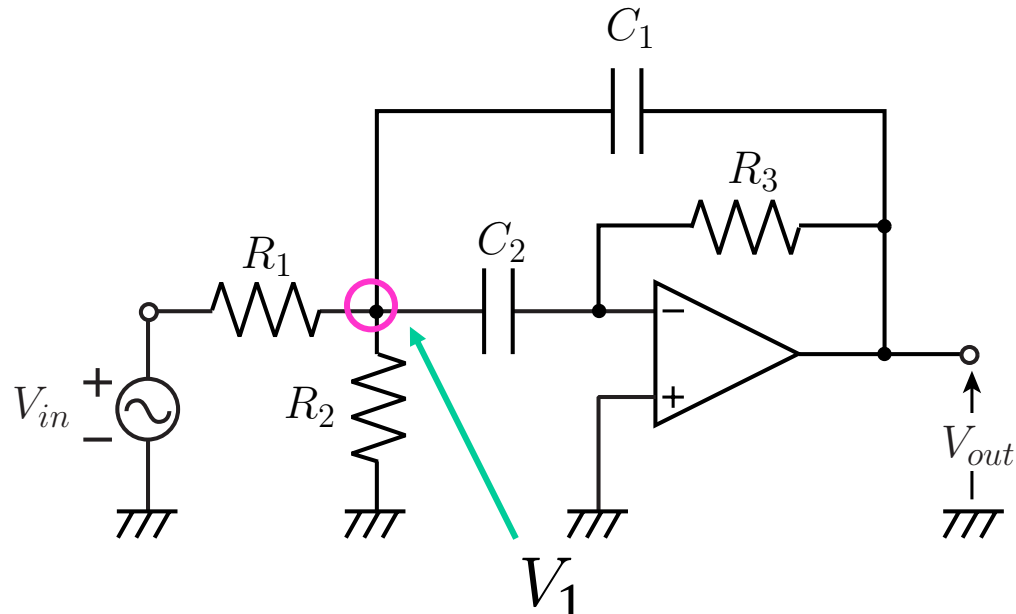


$$T_{delly-bp}(s) = \frac{-s \frac{1}{C_1 R_1}}{s^2 + s \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) \frac{1}{R_3} + \frac{1}{C_1 C_2 R_3} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)}$$

$$C_1 = C_2 = C$$

$$R_1 = R_2 = \frac{1}{Q \omega_0 C}$$

$$R_3 = \frac{2Q}{\omega_0 C}$$



$$\begin{bmatrix} G_1 + G_2 + sC_1 + sC_2 & -sC_1 \\ -sC_2 & -G_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_{out} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 V_{in} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V_{out} = \frac{\begin{vmatrix} G_1 + G_2 + sC_1 + sC_2 & G_1 V_{in} \\ -sC_2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} G_1 + G_2 + sC_1 + sC_2 & -sC_1 \\ -sC_2 & -G_3 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{-(-sC_2)(G_1 V_{in})}{(G_1 + G_2 + sC_1 + sC_2)(-G_3) - (-sC_1)(-sC_2)}$$

$$V_{out} = \frac{\begin{vmatrix} G_1 + G_2 + sC_1 + sC_2 & G_1 V_{in} \\ -sC_2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} G_1 + G_2 + sC_1 + sC_2 & -sC_1 \\ -sC_2 & -G_3 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{-(-sC_2)(G_1 V_{in})}{(G_1 + G_2 + sC_1 + sC_2)(-G_3) - (-sC_1)(-sC_2)}$$

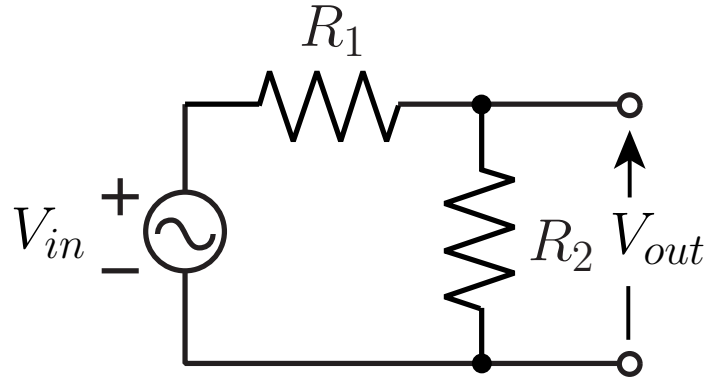
$$T_{delly-bp}(s) = \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{-sC_2 G_1}{s^2 C_1 C_2 + s(C_1 + C_2)G_3 + G_3(G_1 + G_2)}$$

$$= \frac{-s \frac{1}{C_1 R_1}}{s^2 + s\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) \frac{1}{R_3} + \frac{1}{C_1 C_2 R_3} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)}$$

LCシミュレーション

低素子感度フィルタの構成を
目指して

電力伝送

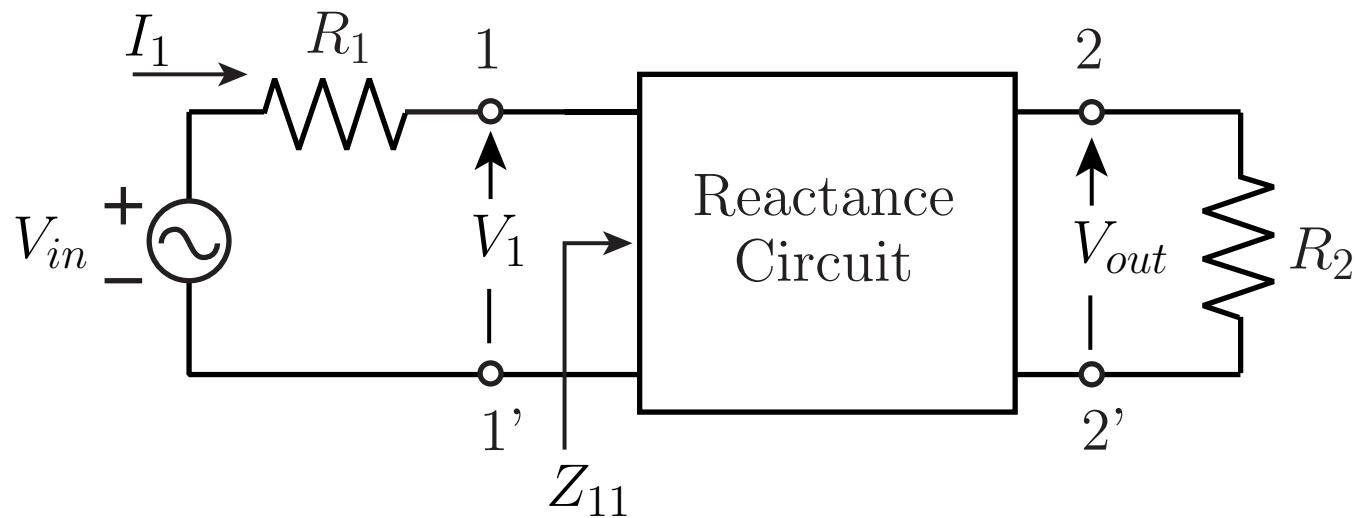


$$P_2 = \frac{|V_{out}|^2}{R_2} = \frac{1}{R_2} \left| \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_{in} \right|^2 = \frac{R_2}{(R_1 + R_2)^2} |V_{in}|^2$$

$$= \frac{1}{\frac{R_1^2}{R_2} + 2R_1 + R_2} |V_{in}|^2 \leq \frac{1}{4R_1} |V_{in}|^2$$

相加相乗平均の定理: $a + b \geq 2\sqrt{ab}$

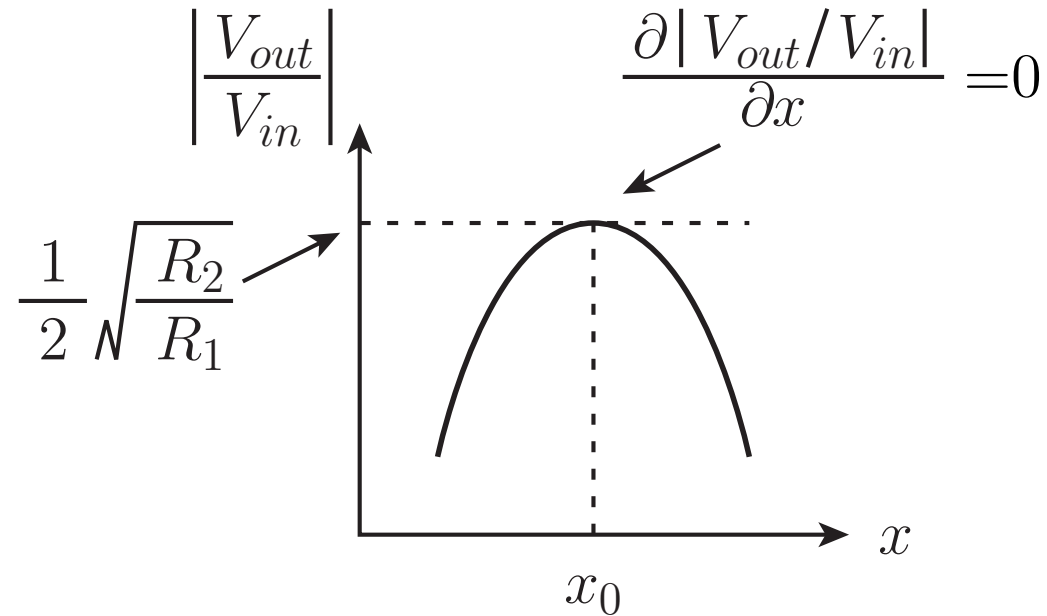
抵抗両終端型LCフィルタ



$$P_{max} = \frac{|V_{in}|^2}{4R_1} \geq P_2 = \frac{|V_{out}|^2}{R_2}$$

$$\left| \frac{V_{out}}{V_{in}} \right| \leq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R_2}{R_1}}$$

抵抗両終端型LCフィルタの素子感度



$$\frac{\partial |T(s)|}{\partial x} = \frac{\partial |V_{out}/V_{in}|}{\partial x} = 0 \quad x=x_0, \quad \omega=\omega_0$$

$$\Delta |T(s)| \approx \frac{\partial |T(s)|}{\partial x} \Delta x$$

抵抗両終端型LCフィルタの構成

周波数変換

$T_0(s)$: 基準低域通過型関数

低域-低域通過変換

$$s \rightarrow \frac{s}{\omega_C}$$

$$T_L(s) = T_0\left(\frac{s}{\omega_C}\right)$$

低域-高域通過変換

$$s \rightarrow \frac{1}{s}$$

$$T_{H0}(s) = T_0\left(\frac{1}{s}\right)$$

$$T_H(s) = T_{H0}\left(\frac{s}{\omega_C}\right)$$

低域-帶域通過變換

$$s \rightarrow \frac{\omega_0}{\omega_b} \left(\frac{s}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{s} \right)$$

$$\omega \rightarrow \frac{\omega_0}{\omega_b} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)$$

$$\frac{\omega_0}{\omega_b} \left(\frac{\omega_{C1}}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_{C1}} \right) = -1$$

$$\omega_{C1} = \frac{-\omega_b + \sqrt{\omega_b^2 + 4\omega_0^2}}{2}$$

$$T_B(s) = T_0 \left(\frac{\omega_0}{\omega_b} \left(\frac{s}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{s} \right) \right)$$

$$-\infty \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow \omega_0$$

$$\infty \rightarrow \infty$$

$$\frac{\omega_0}{\omega_b} \left(\frac{\omega_{C2}}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_{C2}} \right) = 1$$

$$\omega_{C2} = \frac{\omega_b + \sqrt{\omega_b^2 + 4\omega_0^2}}{2}$$

$$\omega_{C2} - \omega_{C1} = \omega_b$$

帶域幅

$$\frac{\omega_0}{\omega_b} \left(\frac{\omega_{C1}}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_{C1}} \right) = -1 \quad \frac{\omega_0}{\omega_b} \left(\frac{\omega_{C2}}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_{C2}} \right) = 1$$

$$\omega_{C1} - \frac{\omega_0^2}{\omega_{C1}} = -\omega_b \quad \omega_{C2} - \frac{\omega_0^2}{\omega_{C2}} = \omega_b$$

$$\omega_{C1} + \omega_{C2} = \frac{\omega_0^2}{\omega_{C1}} + \frac{\omega_0^2}{\omega_{C2}} = \frac{\omega_0^2 (\omega_{C1} + \omega_{C2})}{\omega_{C1} \omega_{C2}}$$

$$\omega_{C1} \omega_{C2} = \omega_0^2$$

幾何学対称

例題1

$$T_0(s) = \frac{1}{y_{min}(s^2 + \sqrt{2}s + 1)} : \text{遮断角周波数 } 1\text{rad/s}$$

遮断周波数4kHzに変換

$$s \rightarrow \frac{s}{\omega_C} = \frac{s}{2\pi \times 4000}$$

$$T(s) = \frac{(2\pi \times 4000)^2}{y_{min} \left\{ s^2 + 2\sqrt{2}\pi \times 4000 s + (2\pi \times 4000)^2 \right\}}$$

例題2 $T_0(s) = \frac{1}{y_{min}(s^2 + \sqrt{2}s + 1)}$: 遮断角周波数1rad/s

中心周波数1kHz, 帯域幅450Hz

$$s \rightarrow \frac{\omega_0}{\omega_b} \left(\frac{s}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{s} \right) = \frac{1000}{450} \left(\frac{s}{2\pi \times 1000} + \frac{2\pi \times 1000}{s} \right)$$

$$T(s) = \frac{1/y_{min}}{\left\{ \frac{\omega_0}{\omega_b} \left(\frac{s}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{s} \right) \right\}^2 + \sqrt{2} \frac{\omega_0}{\omega_b} \left(\frac{s}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{s} \right) + 1}$$

$$= \frac{(1/y_{min}) \omega_b^2 s^2}{s^4 + \sqrt{2} \omega_b s^3 + \left\{ 2 \left(\frac{\omega_0}{\omega_b} \right) + 1 \right\} \omega_b^2 s^2 + \sqrt{2} \omega_b \omega_0^2 s + \omega_0^4}$$

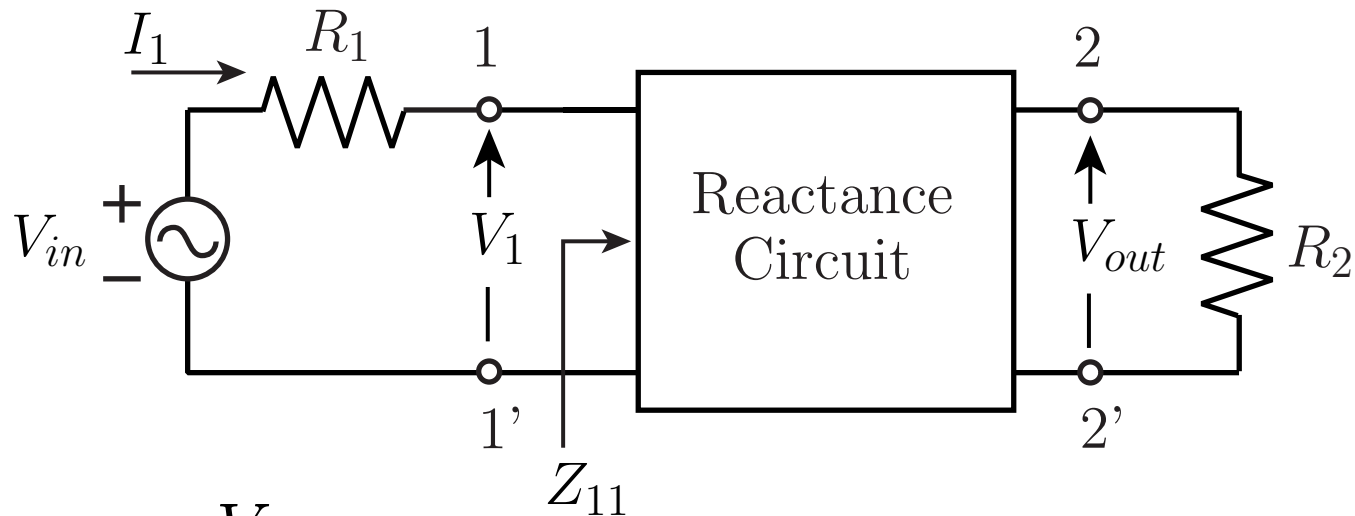
$$T(s) = \frac{(1/y_{\min})\omega_b^2 s^2}{s^4 + \sqrt{2}\omega_b s^3 + \left\{2\left(\frac{\omega_0}{\omega_b}\right) + 1\right\}^2 \omega_b^2 s^2 + \sqrt{2}\omega_b \omega_0^2 s + \omega_0^4}$$

$$= \frac{(1/y_{\min})(2\pi \times 450)^2 s^2}{s^4 + 2\pi \times 450 \times \sqrt{2} s^3 + \left\{2\left(\frac{20}{9}\right)^2 + 1\right\} (2\pi \times 450)^2 s^2 + \sqrt{2} (2\pi \times 1000)^2 (2\pi \times 450) s + (2\pi \times 1000)^4}$$

$$\omega_{C1} = 2\pi \times 800, \quad \omega_{C2} = 2\pi \times 1250$$

$$\omega_{C1} - \omega_{C2} = 2\pi \times 450$$

ダーリントンの方法



$$I_1 = \frac{V_{in}}{R_1 + Z_{11}}$$

$$P_1 = R_{11} |I_1|^2 = \frac{R_{11} |V_{in}|^2}{|R_1 + Z_{11}|^2} = P_2 = \frac{|V_{out}|^2}{R_2}$$

$$|T(s)|^2 = \frac{|V_{out}|^2}{|V_{in}|^2} = \frac{R_2 R_{11}}{|R_1 + Z_{11}|^2}$$

補助関数の導入

$$|A(s)|^2 = 1 - 4 \frac{R_1}{R_2} |T(s)|^2$$

$$|T(s)|^2 = \left| \frac{V_{out}}{V_{in}} \right|^2 = \frac{R_2 R_{11}}{|R_1 + Z_{11}|^2}$$

$$Z_{11} = R_{11} + jX_{11}$$

$$|A(s)|^2 = 1 - 4 \frac{R_1 R_{11}}{|R_1 + R_{11} + jX_{11}|^2}$$

$$= \frac{|R_1 + R_{11} + jX_{11}|^2 - 4R_1 R_{11}}{|R_1 + R_{11} + jX_{11}|^2}$$

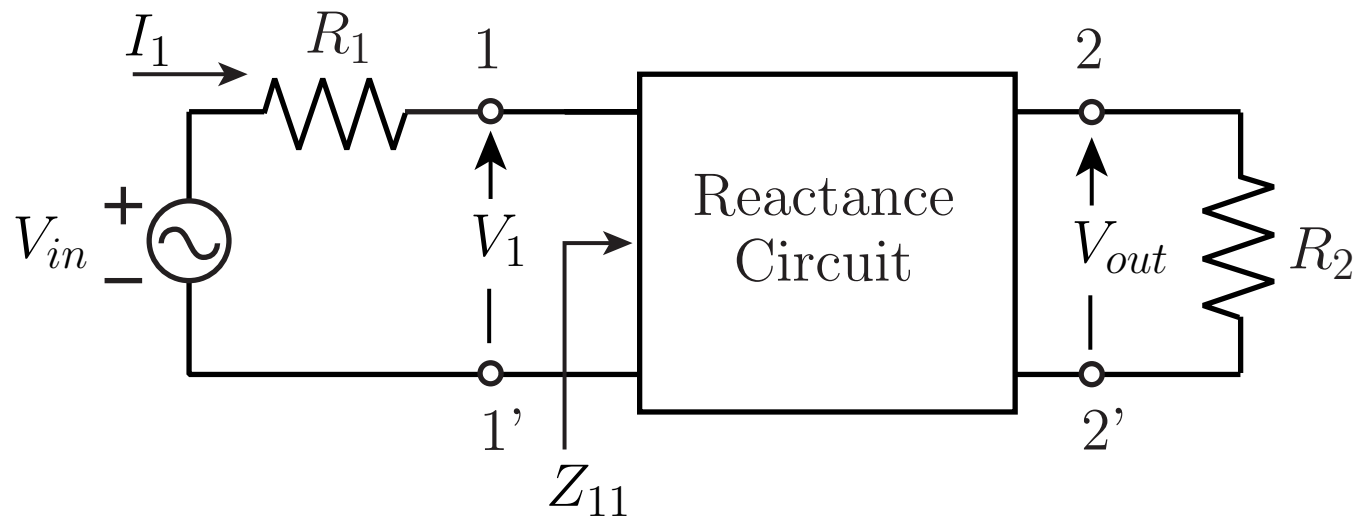
$$= \frac{|R_1 - R_{11} - jX_{11}|^2}{|R_1 + R_{11} + jX_{11}|^2}$$

$$= \frac{|R_1 - Z_{11}|^2}{|R_1 + Z_{11}|^2}$$

抵抗両終端型LCフィルタの合成方法

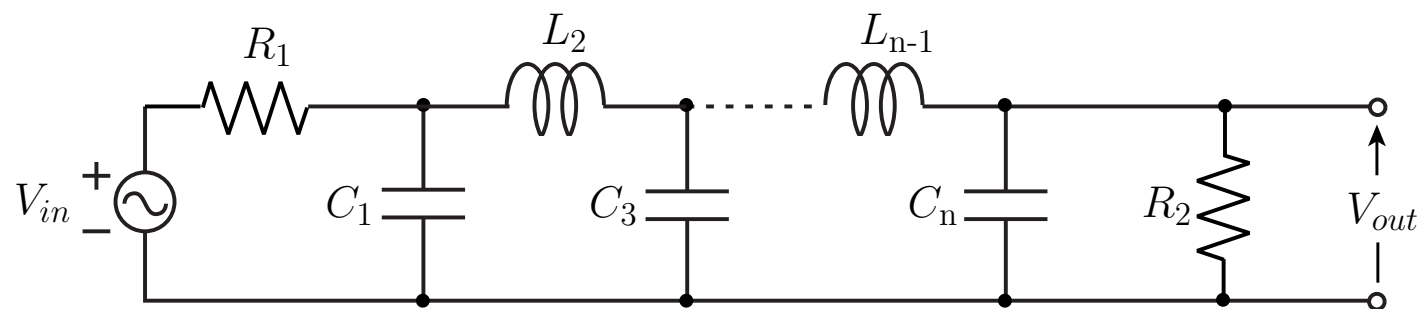
$$A(s) = \pm \frac{R_1 - Z_{11}}{R_1 + Z_{11}} \longrightarrow Z_{11} = R_1 \frac{1 \pm A(s)}{1 \mp A(s)}$$

連分数展開

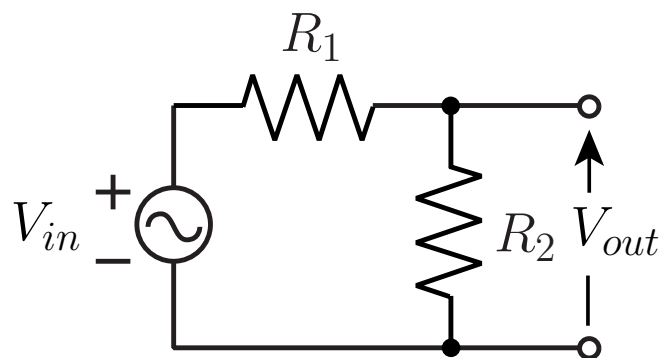


終端抵抗の決定方法

低素子感度性＝電力最大伝送



直流での低域通過型フィルタの等価回路



直流で電力最大伝送

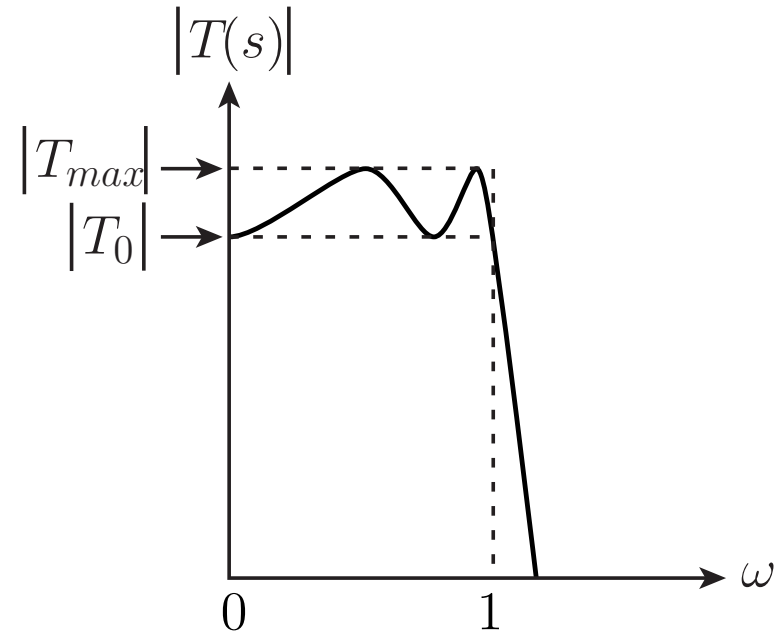


$$R_1 = R_2$$

直流以外で電力最大伝送

$$|y| = \frac{1}{|T(s)|}$$

$$\left| \frac{V_{out}}{V_{in}} \right| \leq \sqrt{\frac{R_2}{4R_1}} \quad \longrightarrow$$



$$|T_{max}|^2 = \frac{R_2}{4R_1} = \frac{1}{4\phi}$$

$$|T_0| = \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{1}{1 + \phi}$$

$$|T_{max}| = \alpha_p |T_0|$$

$$|T_{max}|^2 = \frac{1}{4\phi}$$

$$|T_0| = \frac{1}{1+\phi}$$

$$\longrightarrow |T_{max}|^2 = \alpha_p^2 |T_0|^2 \longrightarrow$$

$$\frac{1}{4\phi} = \frac{\alpha_p^2}{(1+\phi)^2}$$

$$\phi = (\alpha_p \pm \sqrt{\alpha_p^2 - 1})^2$$

$$|T_{max}| = \frac{1}{2(\alpha_p \pm \sqrt{\alpha_p^2 - 1})}$$

例題

3次振幅最大平坦特性

$$T(s) = \frac{1}{y_{min}(s^3 + 2s^2 + 2s + 1)}$$

直流で電力最大伝送



$$R_1 = R_2$$



$$y_{min} = 2$$

$$|A(s)|^2 = 1 - 4 \frac{R_1}{R_2} |T(s)|^2 = 1 - \frac{1}{|s^3 + 2s^2 + 2s + 1|^2}$$

$$\begin{aligned} |A(j\omega)|^2 &= 1 - \frac{1}{|-j\omega^3 - 2\omega^2 + j2\omega + 1|^2} = 1 - \frac{1}{|(1 - 2\omega^2)^2 + (2\omega - \omega^3)|^2} \\ &= 1 - \frac{1}{1 + \omega^6} = \frac{\omega^6}{1 + \omega^6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -s^2 = \omega^2 \text{なので} \quad \frac{\omega^6}{1 + \omega^6} &= \frac{(-s^2)^3}{|s^3 + 2s^2 + 2s + 1|^2} \end{aligned}$$

$$|A(s)|^2 = \frac{(-s^2)^3}{|s^3+2s^2+2s+1|^2} = \frac{ss s(-s)(-s)(-s)}{|s^3+2s^2+2s+1|^2}$$

$$|A(s)|^2 = A(s)A(-s) \text{ であるので}$$

$$A(s) = \frac{s^3}{s^3+2s^2+2s+1} \text{ または } \frac{-s^3}{s^3+2s^2+2s+1}$$

$$A(s) = \pm \frac{R_1 - Z_{11}}{R_1 + Z_{11}} \quad \longrightarrow \quad Z_{11} = R_1 \frac{1 \pm A(s)}{1 \mp A(s)}$$

$$Z_{11} = R_1 \frac{2s^3+2s^2+2s+1}{2s^2+2s+1} \text{ または } R_1 \frac{2s^2+2s+1}{2s^3+2s^2+2s+1}$$

$R_1=1\Omega$ とする

$$Z_{11} = \frac{2s^3 + 2s^2 + 2s + 1}{2s^2 + 2s + 1}$$

$$= s + \frac{s+1}{2s^2 + 2s + 1}$$

$$= s + \frac{1}{2s + \frac{1}{s+1}}$$

$$2s + \frac{1}{s+1}$$

$$s + 1$$

インダクタンス (1H)

容量 (2F)

抵抗 (1 Ω)

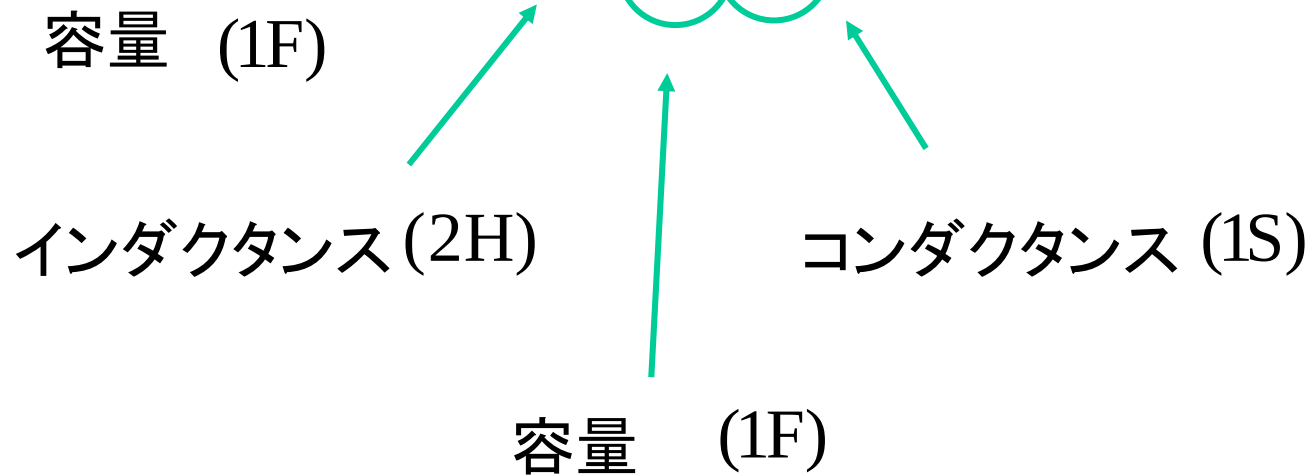
インダクタンス (1H)

$R_1=1\Omega$ とする

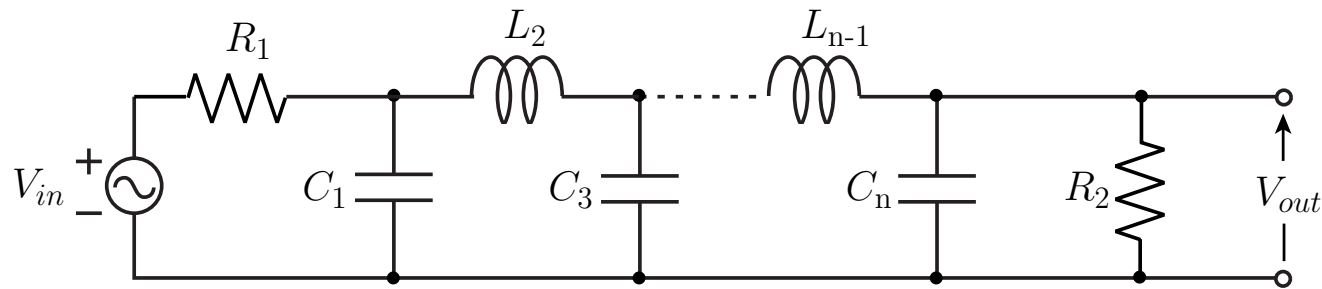
$$Y_{11} = \frac{2s^3 + 2s^2 + 2s + 1}{2s^2 + 2s + 1}$$

$$= s + \frac{s+1}{2s^2 + 2s + 1}$$

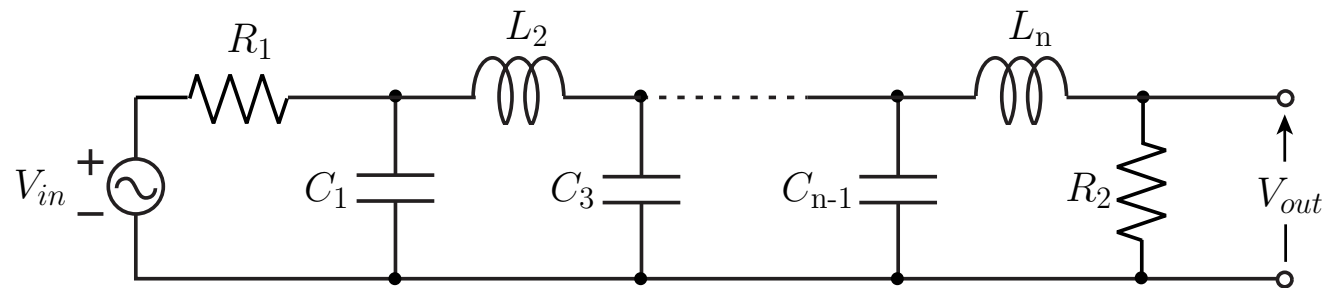
$$= s + \frac{1}{2s + \frac{1}{s+1}}$$



振幅平坦特性の設計公式



奇数次



偶数次

$$R_1=R_2 \quad n : \text{フィルタの次数} \quad \beta_p = \sqrt{\alpha_p^2 - 1}$$

遮断角周波数: 1 rad/s

$$C_1 = \frac{2\beta_p^{1/n} \sin \frac{\pi}{2n}}{R_1}$$

$$L_i C_{i+1} \text{ または } C_i L_{i+1} = 4\beta_p^{2/n} \sin \frac{(2i-1)\pi}{2n} \sin \frac{(2i+1)\pi}{2n}$$

振幅等リプル特性の設計公式

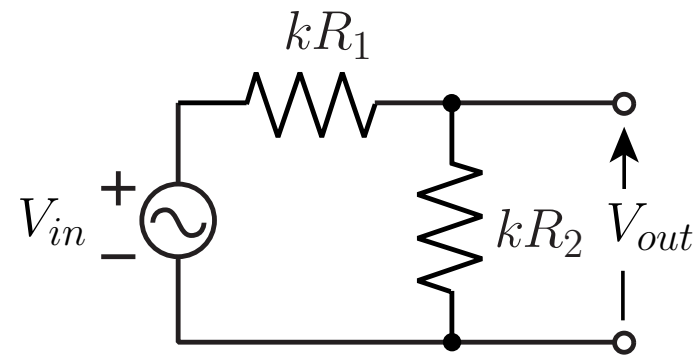
$$n=\text{奇数} : R_2=R_1 \qquad n=\text{偶数} : R_2=(\alpha_p-\sqrt{\alpha_p^2-1})^2 R_1$$

$$\xi = \left(\frac{\alpha_p+1}{\alpha_p-1} \right)^{1/2n} - \left(\frac{\alpha_p-1}{\alpha_p+1} \right)^{1/2n} \qquad b_i = \xi^2 + 4 \sin^2 \frac{i}{n} \pi$$

$$C_1 = \frac{4 \sin \frac{\pi}{2n}}{\xi R_1}$$

$$L_i C_{i+1} \text{または} C_i L_{i+1} = \frac{4 \sin \frac{(2i-1)\pi}{2n} \sin \frac{(2i+1)\pi}{2n}}{b_i}$$

インピーダンス・スケーリング



$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{kR_2}{kR_1 + kR_2} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

周波数スケーリング(低域-低域通過変換)

$T_0(s)$: 基準低域通過型関数

$$s \rightarrow \frac{s}{\omega_C} \quad T_L(s) = T_0\left(\frac{s}{\omega_C}\right)$$

例題

現実的な素子値への変更

「インピーダンススケーリング」と「周波数スケーリング」

(1) 抵抗値を $1\text{k}\Omega$ に(インピーダンススケーリング)

$$R_1=R_2=1\Omega\rightarrow 1\text{k}\Omega$$

$$C=1\text{F}\rightarrow \frac{1}{1000}\text{F}$$

$$L=2\text{H}\rightarrow 2\times 1000\text{H}$$

(2) 遮断周波数を 1kHz に(周波数スケーリング)

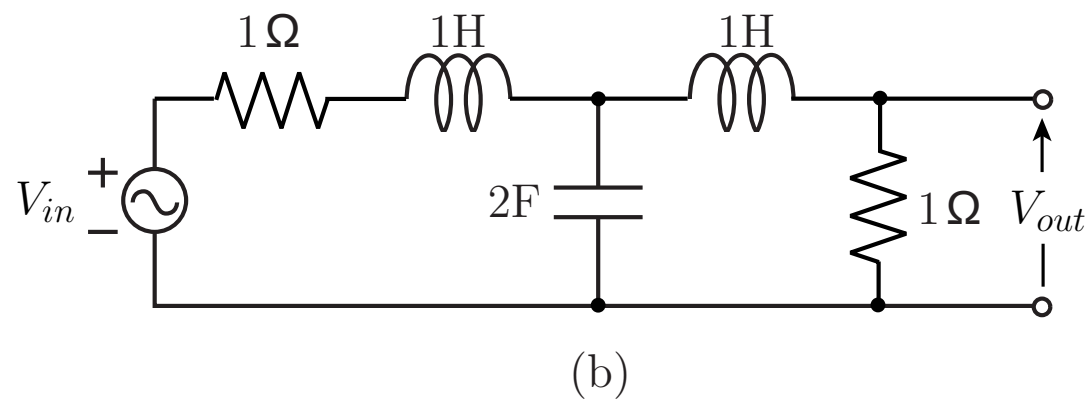
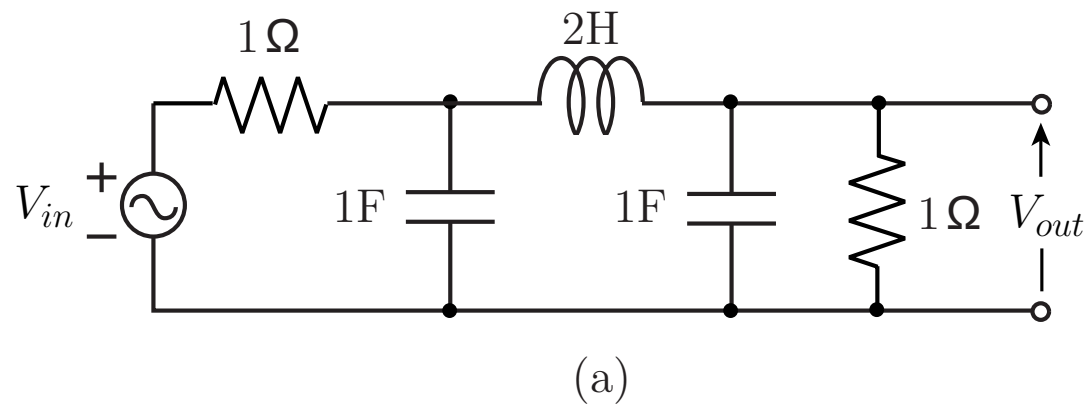
$$j\omega \rightarrow j\frac{\omega}{\omega_C}$$

$$C=\frac{1}{1000}\text{F}\rightarrow \frac{1}{2\pi\times 1000000}\text{F}=0.159\mu\text{F}$$

$$L=2\times 1000\text{H}\rightarrow \frac{2\times 1000}{2\pi\times 1000}\text{H}=0.318\text{H}$$

3次抵抗両終端型LCフィルタ

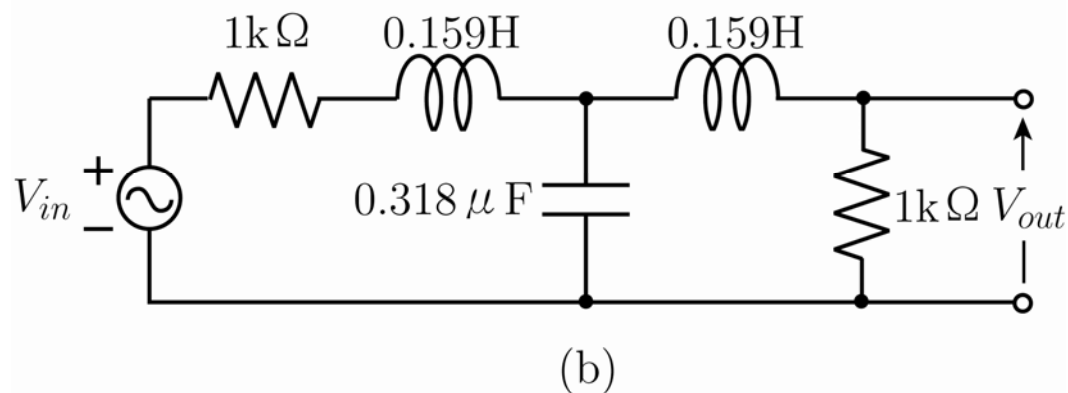
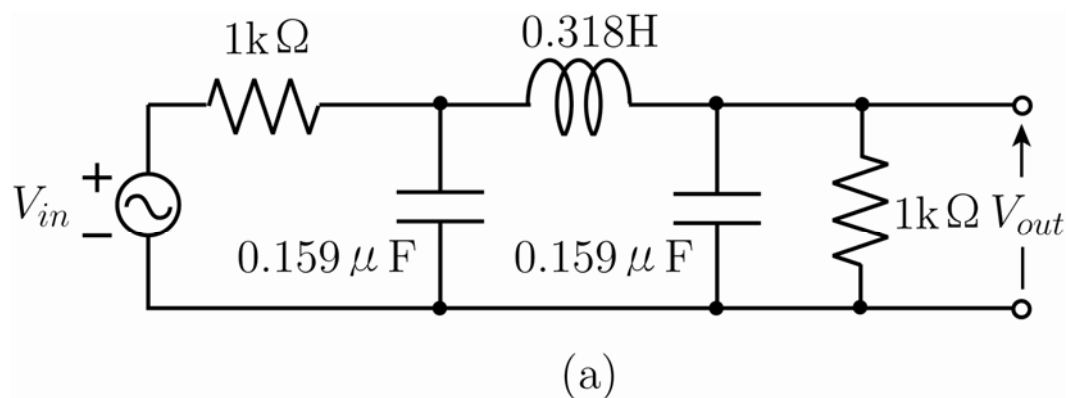
遮断周波数 1rad/s 振幅最大平坦特性



遮断周波数1kHz 振幅最大平坦特性

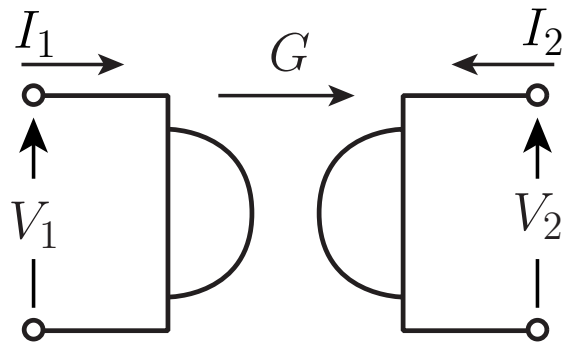
インピーダンスレベル: 1000倍

インダクタンス, 容量: $1/(2000\pi)$ 倍



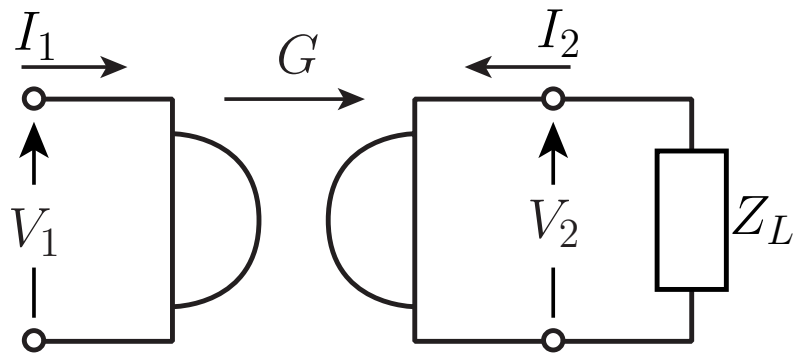
インピーダンス・シミュレーション

ジャイレータ



$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \pm G \\ \mp G & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

複号同順



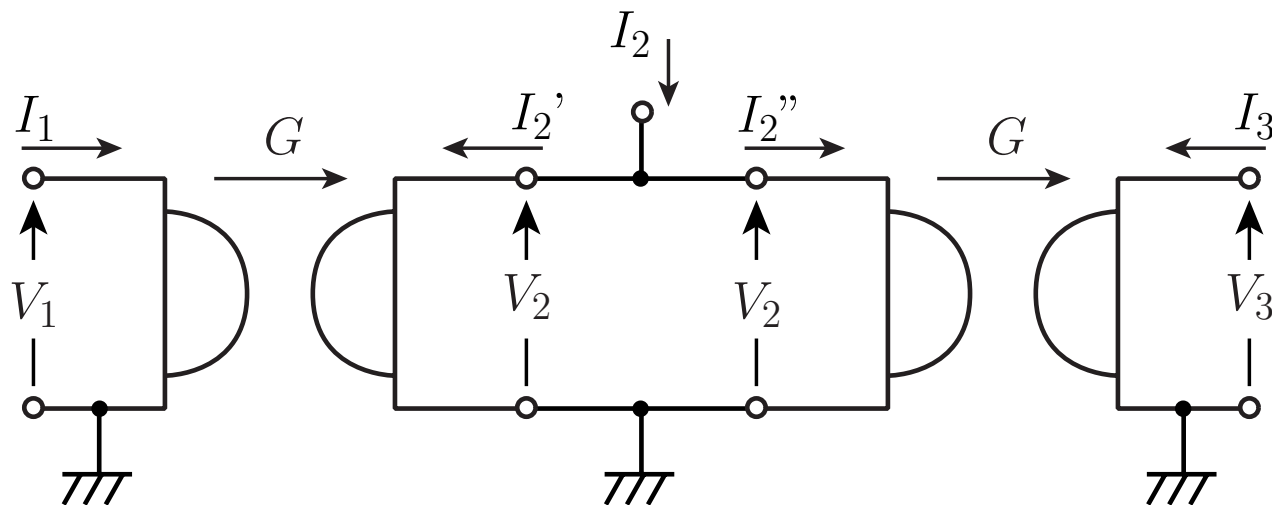
$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \pm G \\ \mp G & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

$$I_1 = \pm G V_2 = \pm G (-Z_L I_2) = \pm G (\pm Z_L G V_1) = Z_L G^2 V_1$$

$$Z_{in} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{1}{G^2 Z_L}$$

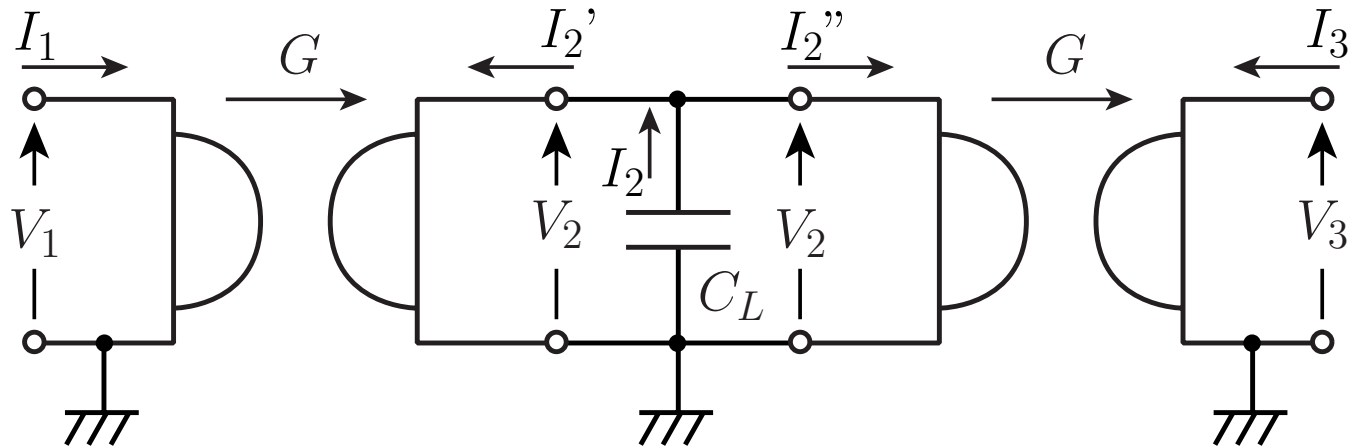
$$Z_L = \frac{1}{sC_L} \rightarrow Z_{in} = s \frac{C_L}{G^2} \quad (L = \frac{C_L}{G^2})$$

3端子対ジャイレータによる非接地インダクタの構成



$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \pm G \\ \mp G & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} I_2'' \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \pm G \\ \mp G & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2' + I_2'' \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \pm G & 0 \\ \mp G & 0 & \pm G \\ 0 & \mp G & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$



$$I_2 = -sC_L V_2$$

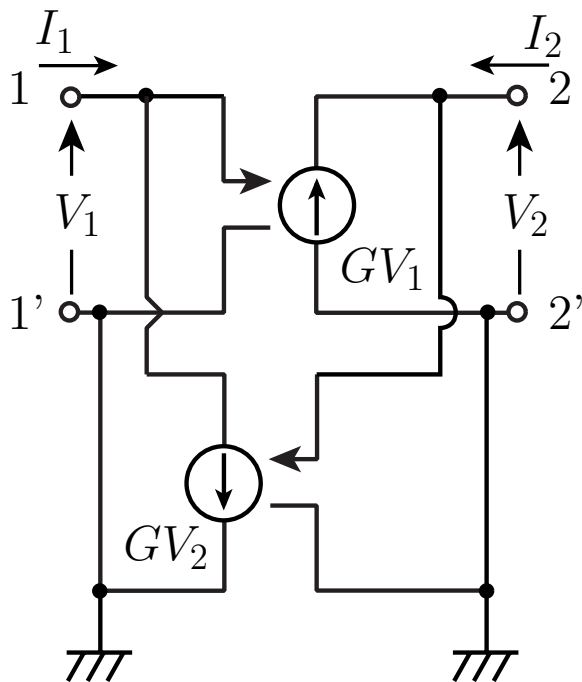
$$I_2 = \mp G(V_1 - V_3)$$

$$V_2 = \pm \frac{V_1 - V_3}{sC_L}$$

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \pm G & 0 \\ \mp G & 0 & \pm G \\ 0 & \mp G & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{G^2}{sC_L} & -\frac{G^2}{sC_L} \\ -\frac{G^2}{sC_L} & \frac{G^2}{sC_L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

ジャイレータの構成例

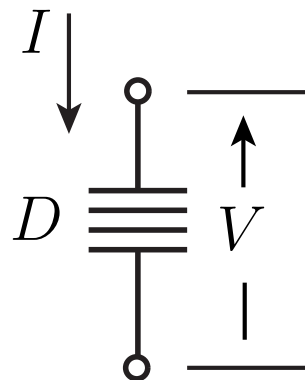


$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & G \\ -G & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

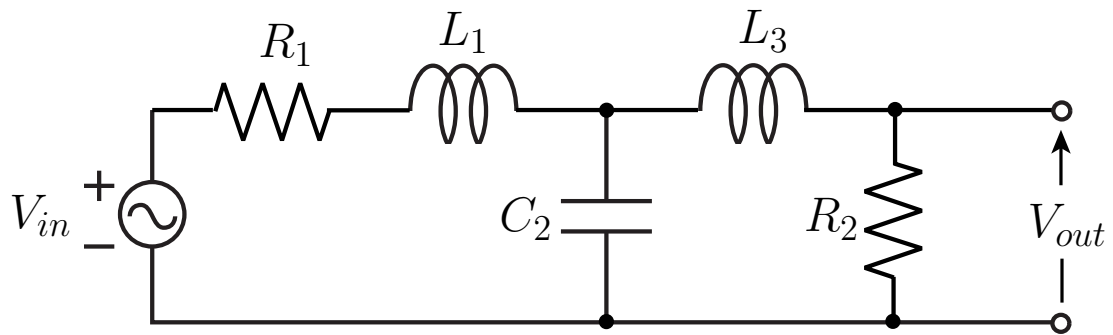
インピーダンス・スケーリング・シミュレーション

$$\begin{array}{ccc}
 & \times \frac{1}{s} & \\
 sL & \longrightarrow & L \quad \text{抵抗} \\
 R & \longrightarrow & \frac{R}{s} \quad \text{容量} \\
 \frac{1}{sC} & \longrightarrow & \frac{1}{s^2 C} \quad \boxed{\text{FDNR}}
 \end{array}$$

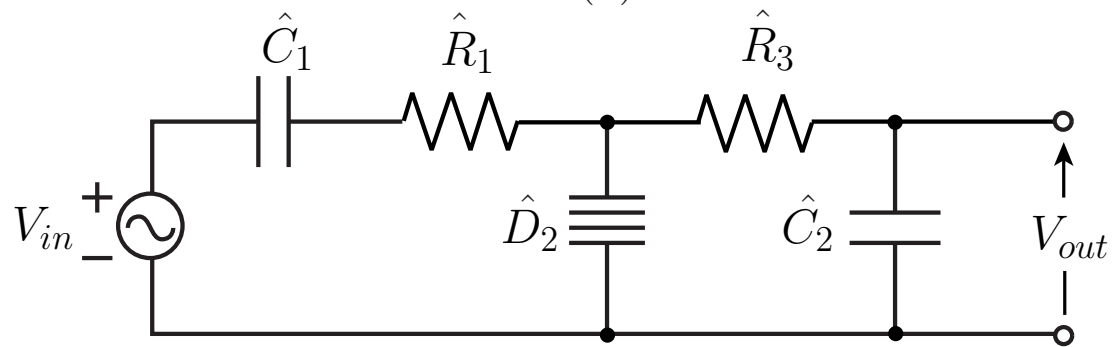
Frequency-Dependent Negative Resistance
(周波数依存性負性抵抗)



$$\frac{V}{I} = \frac{1}{s^2 D}$$

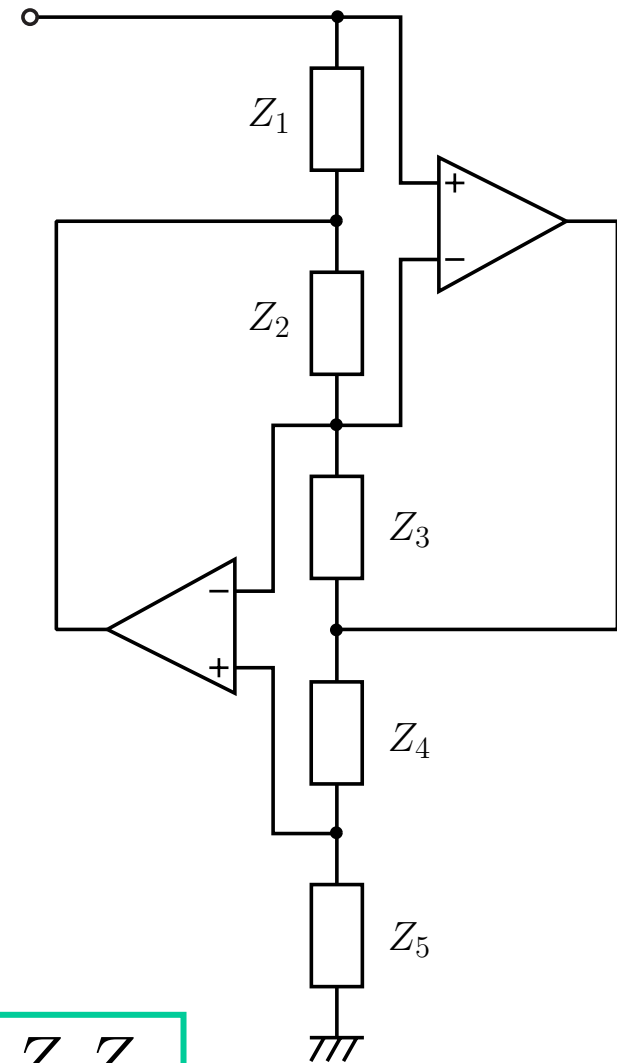


(a)



(b)

$$Z_{in} = \frac{Z_1 Z_3 Z_5}{Z_2 Z_4}$$



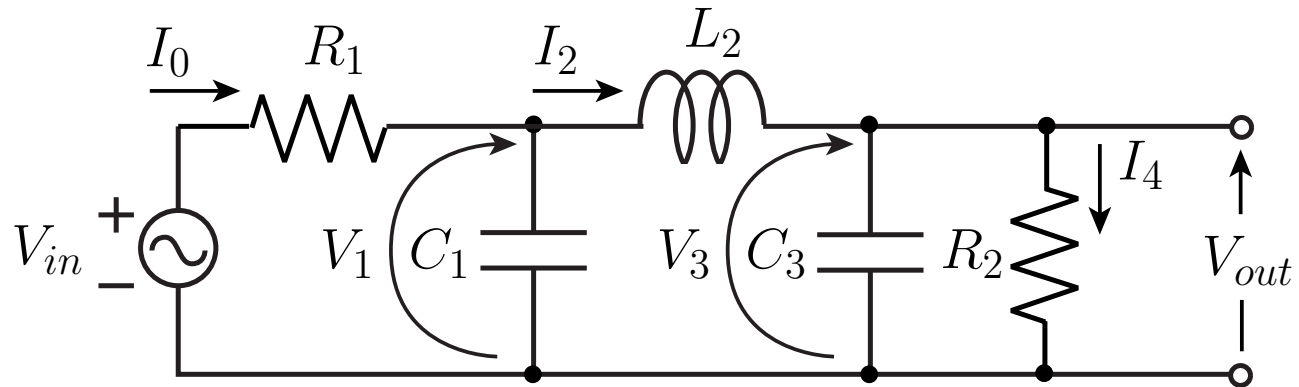
GIC

リープフログ・シミュレーション

リープフログ=Leapfrog

カエル跳び？

馬跳び!



$$I_0 = \frac{V_{in} - V_1}{R_1}$$

$$V_1 = \frac{I_0 - I_2}{sC_1}$$

$$I_2 = \frac{V_1 - V_3}{sL_2}$$

$$V_3 = \frac{I_2 - I_4}{sC_3}$$

$$I_4 = \frac{V_3}{R_2}$$

シグナルフローグラフ

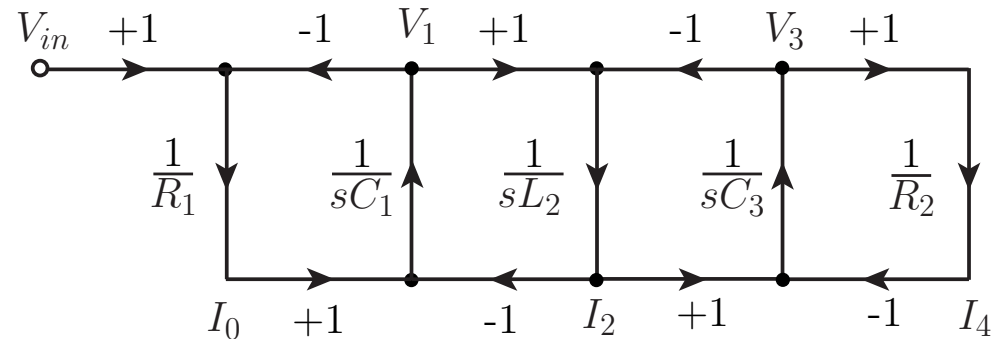
$$I_0 = \frac{V_{in} - V_1}{R_1}$$

$$V_1 = \frac{I_0 - I_2}{sC_1}$$

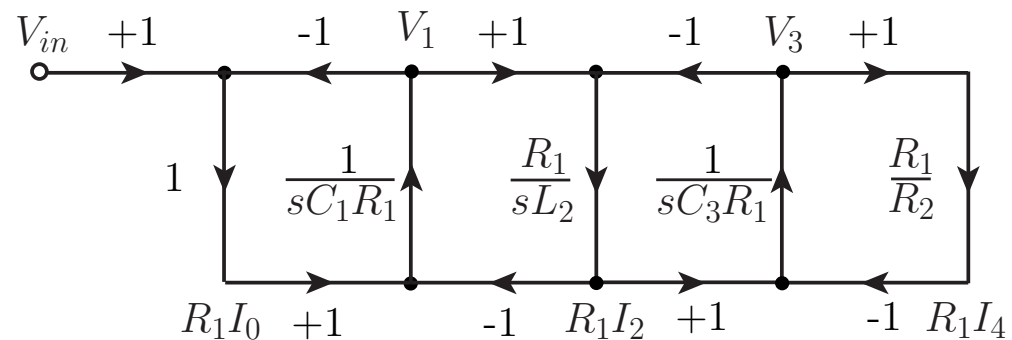
$$I_2 = \frac{V_1 - V_3}{sL_2}$$

$$V_3 = \frac{I_2 - I_4}{sC_3}$$

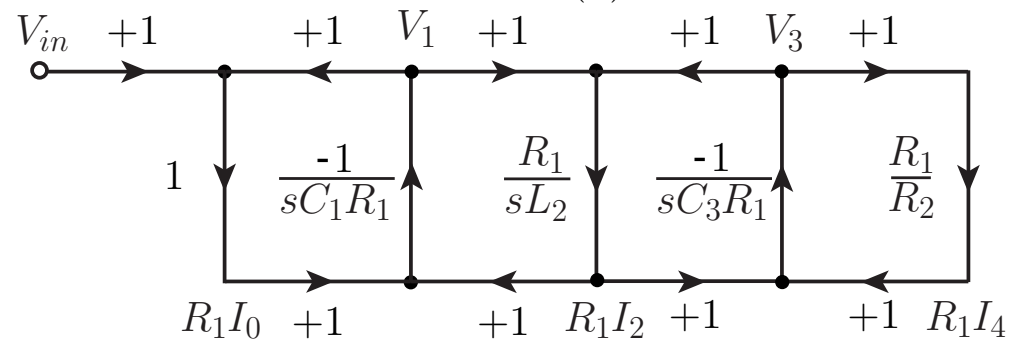
$$I_4 = \frac{V_3}{R_2}$$



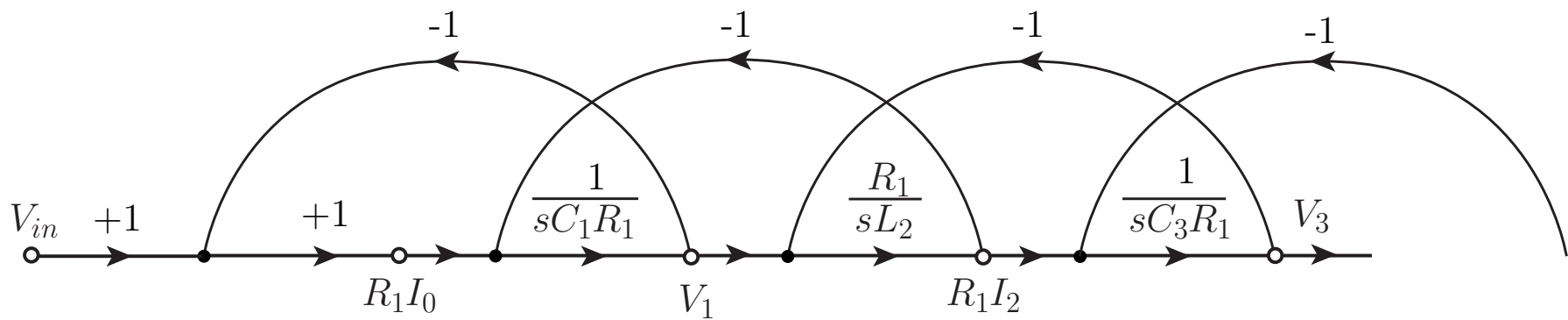
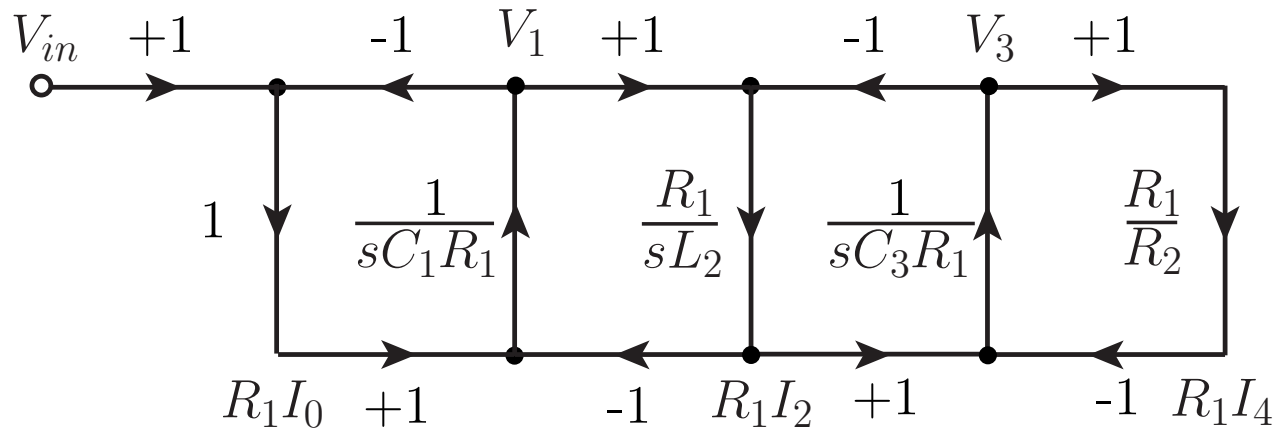
(a)



(b)

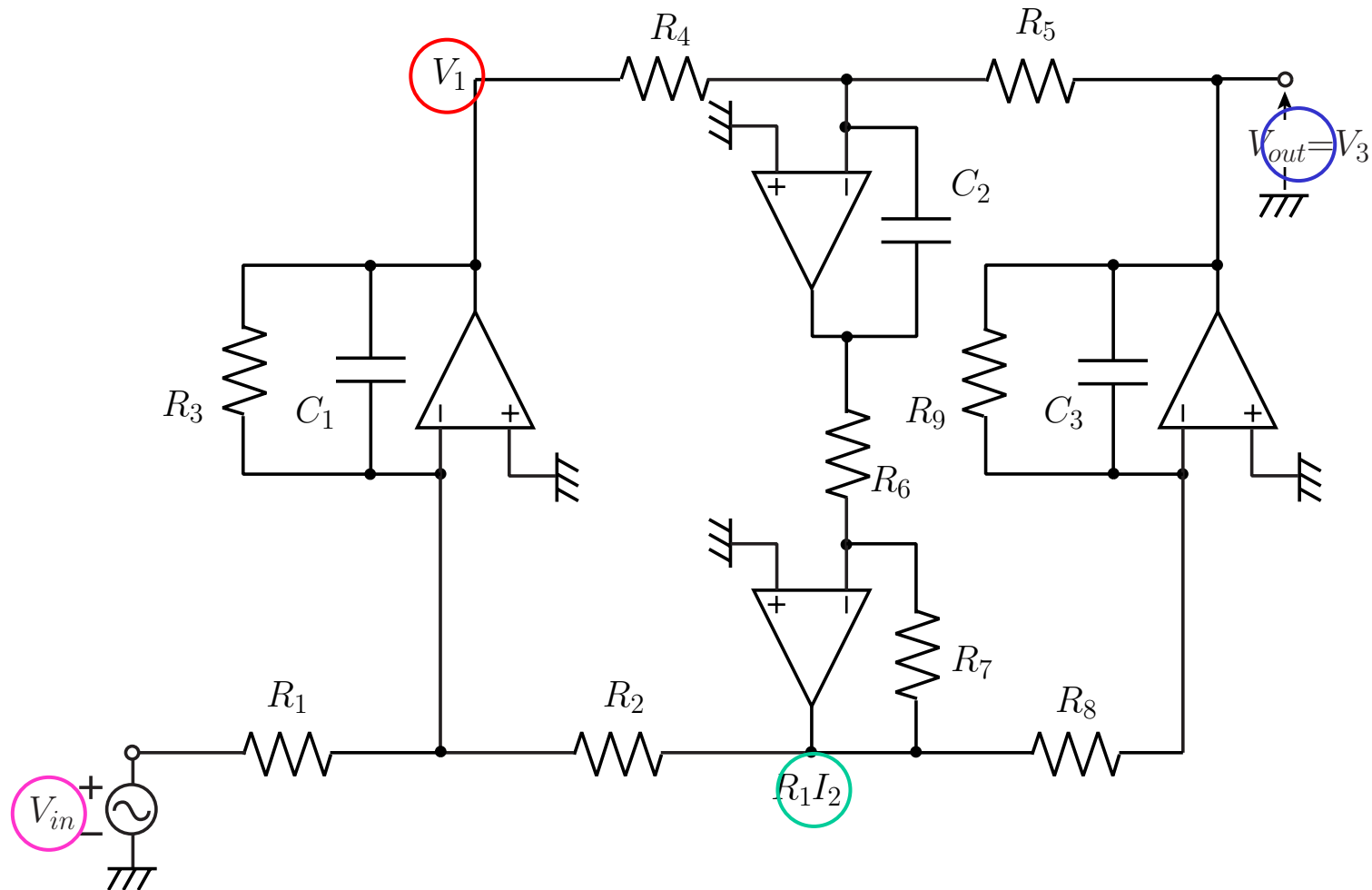
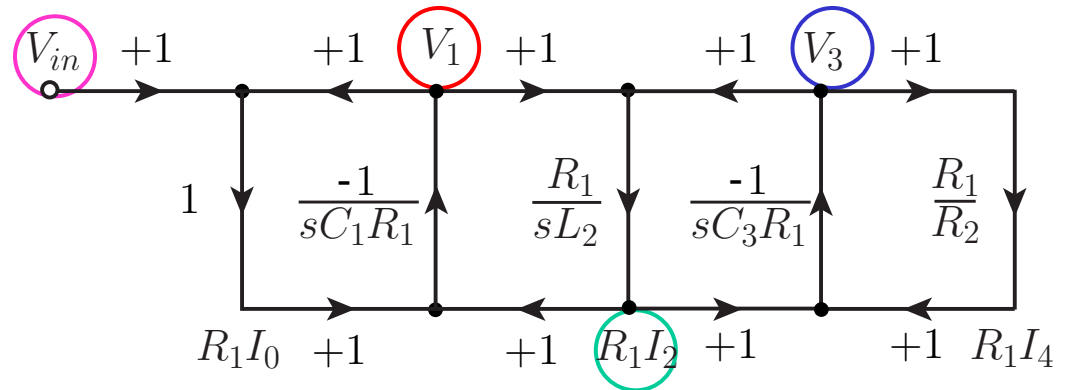


(c)



馬跳び

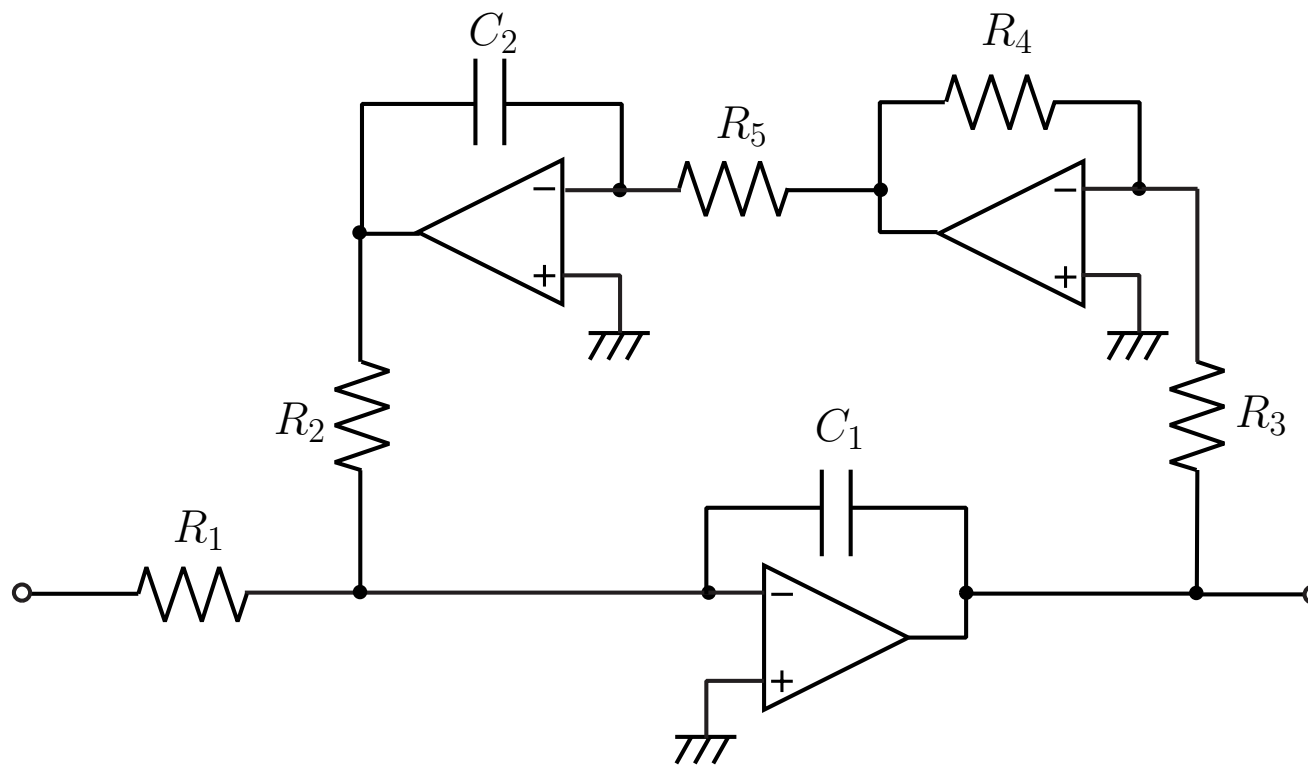
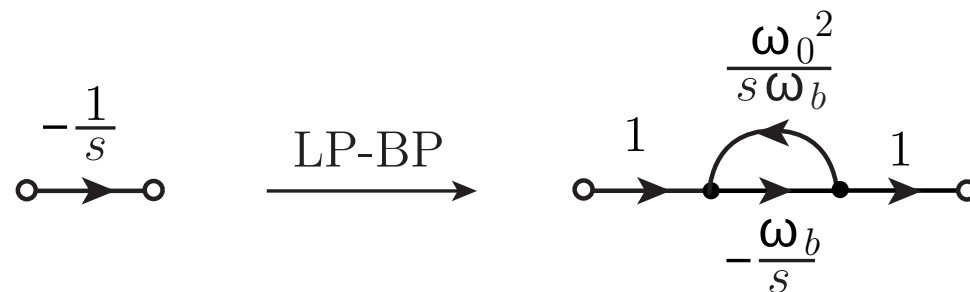
3次低域通過型フィルタの構成例



帯域通過フィルタの構成

低域-帯域通過変換:

$$s \rightarrow \frac{\omega_0}{\omega_b} \left(-\frac{s}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{s} \right)$$



周波数特性の自動調整

素子値の一樣偏差の影響

$$T_0(s)=F[sC_i, G_j]$$

一樣偏差: $C_i \rightarrow k_C C_i \quad G_j \rightarrow k_G G_j$

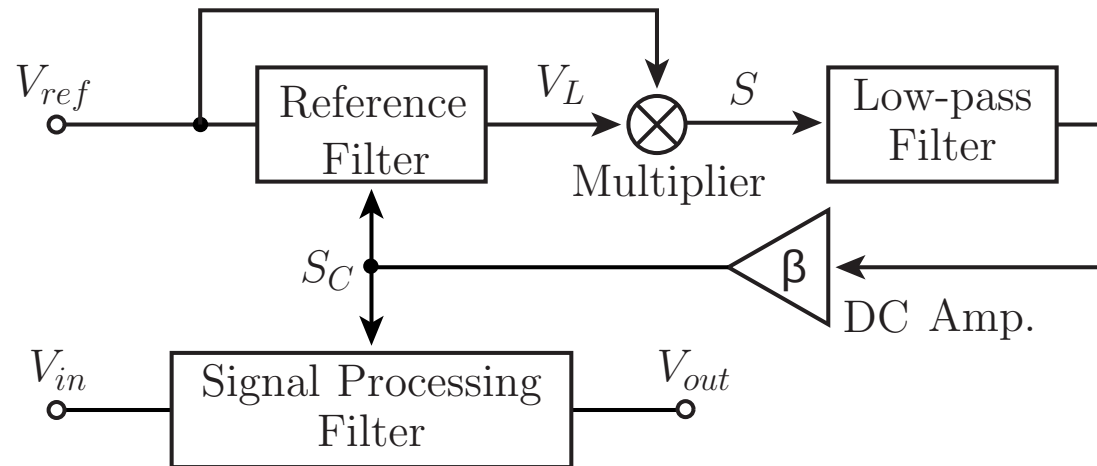
$$T(s)=F[s k_C C_i, k_G G_j]$$

インピーダンス・スケーリング

$$T(s)=F\left[s \frac{k_C}{k_G} C_i, G_j\right]=T_0\left(s \frac{k_C}{k_G}\right)$$

周波数スケーリング

周波数偏差自動調整回路



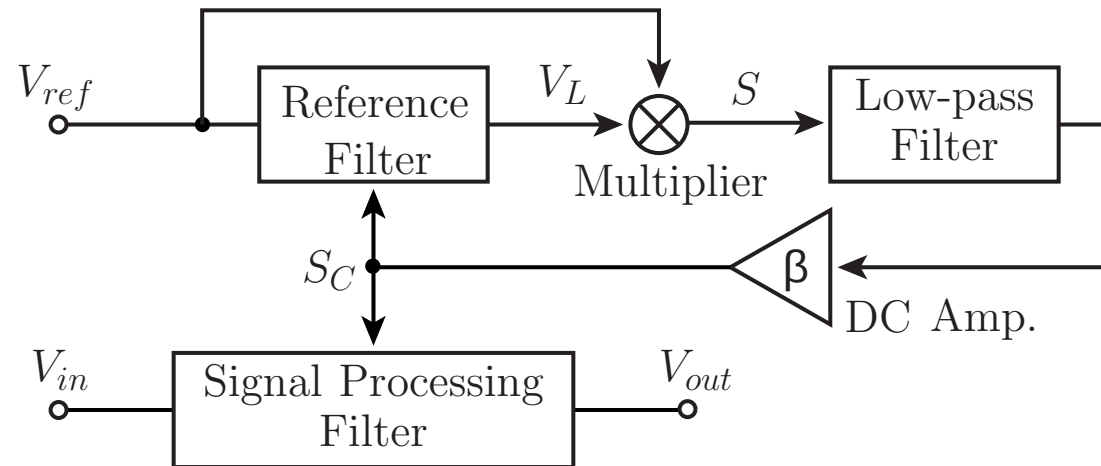
$$V_{ref} = V_m \sin \omega_{ref} t$$

$$V_L = A V_m \sin(\omega_{ref} t + \theta)$$

$$S = M(V_{ref} \times V_L) = M \{ V_m \sin \omega_{ref} t \times A V_m \sin(\omega_{ref} t + \theta) \}$$

$$= \frac{1}{2} M A V_m^2 \{ \cos \theta - \cos(2\omega_{ref} t + \theta) \}$$

$$S_C = \frac{1}{2} \beta M A V_m^2 \cos \theta$$



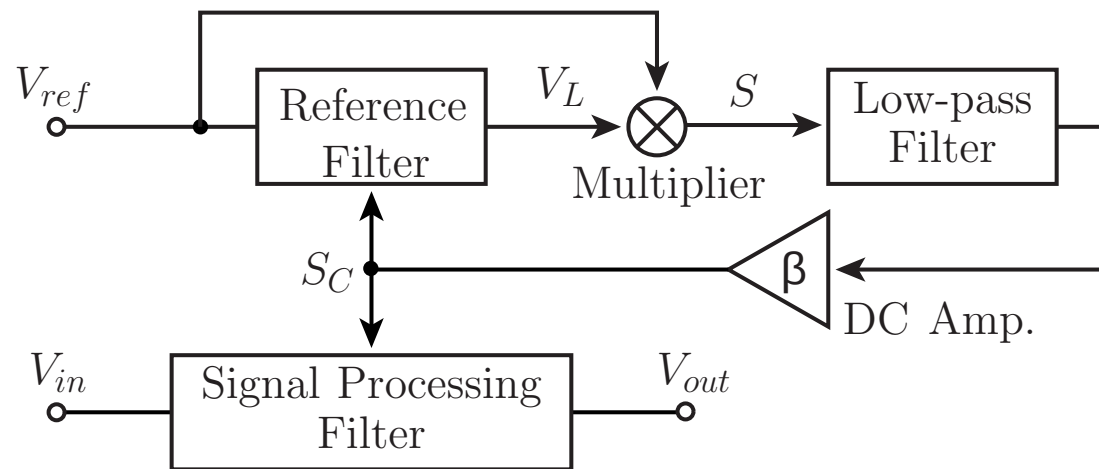
$$S_C = \frac{1}{2} \beta M A V_m^2 \cos \theta$$

$$\beta \rightarrow \infty$$

:有限値に確定

$$\cos \theta = \frac{2 S_C}{\beta M A V_m^2}$$

$$\cos \theta \rightarrow 0$$



参照用フィルタの伝達関数:

$$T_{L2}(s) = \frac{K \omega_0^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}$$

$$\theta = -\tan^{-1} \frac{\omega_{ref} \omega_0}{Q(\omega_0^2 - \omega_{ref}^2)}$$

$$\theta = -90^\circ \rightarrow \omega_0 = \omega_{ref}$$

参照用フィルタの素子偏差の割合

||

信号処理用フィルタの素子偏差の割合

例題

参照用低域通過フィルタ

$$T_{L2}(s) = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2} \quad K=1, \omega_0=2\pi \times 1000 \text{ rad/s}, Q=5$$

乗算回路

$$M=1\text{V}^{-1}$$

直流増幅回路

$$\beta=100$$

参照入力信号振幅

$$V_m=0.2\text{V}$$

$$\cos\theta = \frac{2S_C}{\beta M A V_m^2}$$

$$A=?$$

$$S_C=?$$

$\omega_{ref} \approx \omega_0$ とすれば

$$A = |T_{L2}(j\omega_{ref})| = \left| \frac{K\omega_0^2}{-\omega_{ref}^2 + j\frac{\omega_0}{Q}\omega_{ref} + \omega_0^2} \right| \approx Q$$

$g_m = \alpha S_C$ かつ $g_m \propto \omega_0$ とすれば

$$\omega_{00} \rightarrow S_{C0}$$

$$\omega_0 \rightarrow S_C$$

$$\frac{\omega_0}{\omega_{00}} = \frac{S_C}{S_{C0}}$$

$$S_C = \frac{\omega_0}{\omega_{00}} S_{C0}$$

$$M=1\text{V}^{-1} \quad \beta=100 \quad V_m=0.2\text{V} \quad A \approx Q=5$$

$$\omega_{00}=2\pi \times 800 \text{rad/s} \quad , \quad S_{C0}=0.1\text{V} \rightarrow S_C=0.125\text{V}$$

$$\cos \theta = \frac{2S_C}{\beta M A V_m^2} = 0.03125 \quad \theta = -88.2^\circ$$

$$\theta = -\tan^{-1} \frac{\omega_{ref} \omega_0}{Q(\omega_0^2 - \omega_{ref}^2)}$$

$$\omega_0 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4Q^2 \tan^2 \theta}}{2Q \tan \theta} \omega_{ref} = 0.992 \omega_{ref}$$