

## 5. 4. 電磁波と原子の結合方程式

5. 3. で求めたポピュレーション行列要素を 4. 5. で求めた他の行列要素の式に代入し、回転波近似を用いて（まだ積分しないがいずれ積分することを考えて速く回転する項は除去しておく）整理する。また分極の式を電磁波の電界の方程式に代入する。その結果、電磁波と原子の結合した次の方程式が得られる。

$$\begin{aligned}\dot{p}_{aa} &= \lambda_a(z, t) - \gamma_a p_{aa} - \frac{1}{2} \left( \frac{\mu}{\hbar} \right)^2 E_n(t)^2 \sin^2(K_n z) \frac{\gamma}{(\omega_{ab} - \omega_n)^2 + \gamma^2} \{p_{aa}(z, t) - p_{bb}(z, t)\} \\ \dot{p}_{bb} &= \lambda_b(z, t) - \gamma_b p_{bb} + \frac{1}{2} \left( \frac{\mu}{\hbar} \right)^2 E_n(t)^2 \sin^2(K_n z) \frac{\gamma}{(\omega_{ab} - \omega_n)^2 + \gamma^2} \{p_{aa}(z, t) - p_{bb}(z, t)\}\end{aligned}$$

さらに 5. 2. で求めた式に代入して次を得る。

$$\begin{aligned}\dot{E}_n + \frac{\omega_n}{2Q_n} E_n &= \frac{\omega_n \mu^2}{2\varepsilon_0 \hbar} \frac{\gamma}{(\omega_{ab} - \omega_n)^2 + \gamma^2} \frac{\int_0^L \sin^2(K_n z) \{p_{aa}(z, t) - p_{bb}(z, t)\} dz}{\int_0^L \sin^2(K_n z) dz} E_n \\ \omega_n + \dot{\phi}_n &\approx \omega_n \left\{ 1 - \frac{\mu^2}{2\varepsilon_0 \hbar} \frac{\omega_n - \omega_{ab}}{(\omega_{ab} - \omega_n)^2 + \gamma^2} \frac{\int_0^L \sin^2(K_n z) \{p_{aa}(z, t) - p_{bb}(z, t)\} dz}{\int_0^L \sin^2(K_n z) dz} \right\}\end{aligned}$$

この先に進むために、各エネルギー準位のポピュレーション、すなわち、各エネルギーに見出される原子の数、は拡散などの結果として  $z$  方向に一様になっているものと仮定する（光の定在波とポピュレーションの空間分布には関係があり、この仮定は必ずしも現実的ではないかもしれない。しかしここでは理論の簡単化のためにこのようにする）。

このとき式は次のようになる。

$$\begin{aligned}\dot{p}_{aa} &= \lambda_a - \gamma_a p_{aa} - \frac{1}{4} \left( \frac{\mu}{\hbar} \right)^2 E_n(t)^2 \frac{\gamma}{(\omega_{ab} - \omega_n)^2 + \gamma^2} (p_{aa} - p_{bb}) \\ \dot{p}_{bb} &= \lambda_b - \gamma_b p_{bb} + \frac{1}{4} \left( \frac{\mu}{\hbar} \right)^2 E_n(t)^2 \frac{\gamma}{(\omega_{ab} - \omega_n)^2 + \gamma^2} (p_{aa} - p_{bb}) \\ E_n &= E_n(0) \exp \left[ \left\{ \frac{\omega_n \mu^2}{2\varepsilon_0 \hbar} \frac{\gamma}{(\omega_{ab} - \omega_n)^2 + \gamma^2} (p_{aa} - p_{bb}) - \frac{\omega_n}{2Q_n} \right\} t \right] \\ \omega_n + \dot{\phi}_n &\approx \omega_n \left\{ 1 - \frac{\mu^2}{2\varepsilon_0 \hbar} \frac{\omega_n - \omega_{ab}}{(\omega_{ab} - \omega_n)^2 + \gamma^2} (p_{aa} - p_{bb}) \right\}\end{aligned}$$

4本の内の上3本の式は電磁波と原子との結合方程式になっている。すなわち、まず第三式は、固有モード  $n$  の電界振幅は、ポピュレーション差  $p_{aa} - p_{bb}$  が正、すなわち上準位の原子数（ポピュレーション）が下準位の原子数より大きくて指数関数引数の第一項が正で、しかも、第二項よりも大きければ、時間とともに増大することを表す。そして第一式は、上準位の原子数はポンピングにより増大し、緩和により減少し、そして電界の増幅により減少することを示している。また第二式は、下準位の原子数は励起により増大し、緩和により減少し、電界の増幅により増大することを示す。よって増幅により電界強度が増加するとポピュレーション差  $p_{aa} - p_{bb}$  は減少することが分かる。すると電界の増大は続かずある値で飽和する。上に導き出した式を用いれば各準位のポピュレーション、電界強度の時間変化を描写できる。コンピュータシミュレーションも可能である。

## 5. 5. 定常発振状態

定常状態でのポピュレーション、電界強度は5. 4. の式から時間微分を零とすることにより次のようになる。

$$-(\gamma_a + R)p_{aa} + Rp_{bb} = -\lambda_a \quad -Rp_{aa} + (\gamma_b + R)p_{bb} = \lambda_b$$

$$\text{ここに } R = \frac{1}{4} \left( \frac{\mu}{\hbar} \right)^2 E_n(t)^2 \frac{\gamma}{(\omega_{ab} - \omega_n)^2 + \gamma^2}$$

これを解いて、

$$p_{aa} - p_{bb} = \frac{\frac{\lambda_a}{\gamma_a} - \frac{\lambda_b}{\gamma_b}}{R \left( \frac{1}{\gamma_a} + \frac{1}{\gamma_b} \right) + 1}$$

このときに、正味の増大係数は0になっている。すなわち、

$$\frac{\omega_n \mu^2}{2\varepsilon_0 \hbar} \frac{\gamma}{(\omega_{ab} - \omega_n)^2 + \gamma^2} \frac{\frac{\lambda_a}{\gamma_a} - \frac{\lambda_b}{\gamma_b}}{R \left( \frac{1}{\gamma_a} + \frac{1}{\gamma_b} \right) + 1} - \frac{\omega_n}{2Q_n} = 0$$

$$E_n(t)^2 = \frac{\left( \frac{\lambda_a}{\gamma_a} - \frac{\lambda_b}{\gamma_b} \right) - \frac{(\omega_{ab} - \omega_n)^2 + \gamma^2}{\gamma} \frac{\varepsilon_0 \hbar}{\mu^2 Q_n}}{\frac{1}{4} \frac{\varepsilon_0}{\hbar Q_n} \left( \frac{1}{\gamma_a} + \frac{1}{\gamma_b} \right)}$$

まず共振器内の電界強度が0の場合、励起準位にある原子数と基底準位にある原子数の差

(反転分布) は  $p_{aa} - p_{bb} = \frac{\lambda_a}{\gamma_a} - \frac{\lambda_b}{\gamma_b}$  となり、原子励起 (ポンピング) とそれぞれの準位の緩和

係数で決まる。これを飽和がない時の反転分布と呼ぶ。飽和が無いときの反転分布が十分に (利得が損失にうち勝つだけ) 大きいと、電界強度は時間と共に増大していく。電界

強度が大きくなると反転分布  $p_{aa} - p_{bb}$  は次第に減少する。そして電界強度が上の最後の式

の大きさになると利得と損失がちょうど等しくなり、電界強度は完全に飽和し、以後一定の値をとる。これがレーザの定常発振状態である。

## 5. 6. レーザ発振しきい値

励起強度を  $N = \frac{\lambda_a}{\gamma_a} - \frac{\lambda_b}{\gamma_b}$  なる  $N$  で表すと、5. 5. で導いた式から、電界強度は励起強度に対して次の式のように変化する。

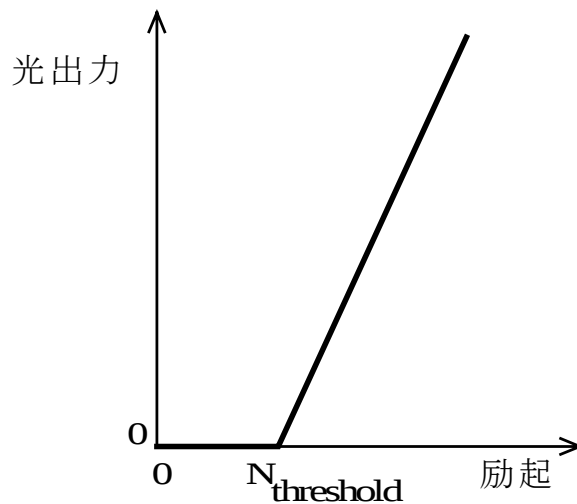
$$E_n(t)^2 = \frac{4\hbar Q_n}{\varepsilon_0 \left( \frac{1}{\gamma_a} + \frac{1}{\gamma_b} \right)} (N - N_{threshold})$$

ここに励起のしきい値は5. 5. で議論した利得が零になる条件より

$$N_{threshold} = \frac{\varepsilon_0 \hbar}{\mu^2 Q_n} \left\{ \gamma + \frac{(\omega_{ab} - \omega_n)^2}{\gamma} \right\}$$

で与えられる。電界が零で正味利得が正になる励起条件が発振しきい値である。これ以上の励起を行うと電磁波強度は励起に対して直線的に増加する。レーザの励起と出力の典型的な関係を図に示す。

共振角周波数が原子の共鳴角周波数に一致した場合に一番小さな励起で発振開始する。そのときのしきい値は緩和係数  $\gamma$  に比例し、 $Q$  値に反比例し、ダイポールモーメントの二乗に反比例する。



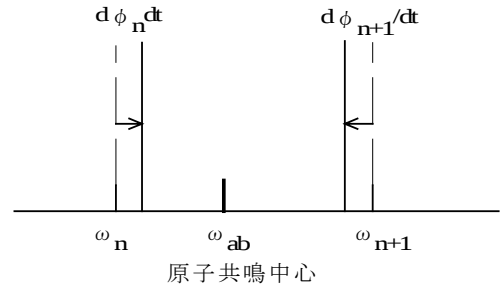
## 5. 7. 周波数引っ張り現象

レーザ発振周波数は5. 4. で導いたように次で与えられる。

$$\omega_n + \dot{\phi}_n \approx \omega_n \left\{ 1 - \frac{\mu^2}{2\varepsilon_0 \hbar} \frac{\omega_n - \omega_{ab}}{(\omega_{ab} - \omega_n)^2 + \gamma^2} (p_{aa} - p_{bb}) \right\}$$

反転分布が形成されている時 ( $p_{aa} - p_{bb} > 0$ ) には、レーザ発振角周波数は共振器のみで決まる共振角周波数から、原子の共鳴角周波数の方向に引っ張られるようにシフトすることが分かる (図参照)。この現象を周波数引っ張り現象と呼ぶ。

この現象は媒質の屈折率変化で解釈することができる。すなわち、利得媒質の屈折率は4. で述べたように共鳴周波数よりも低い周波数の光に対しては低くなり、高い周波数に対しては高くなる。光の波長は屈折率に反比例する。この屈折率変化の方向は、例えば、原子の共鳴周波数よりも低い側の共振器共振周波数では波長が伸びる方向で、周波数を高い方にずらせることで共振条件が合う。共振器の共振周波数と原子の共鳴周波数とは一般には一致しない。ところが、活性媒質は自らの屈折率を変化させることで共振器の共振周波数を原子の共鳴周波数に近づけている。興味深い現象である。



## 5. 8. 利得スペクトル線幅広がり

レーザ媒質の利得スペクトルを調べる。5. 5. の式より、

$$\alpha(\omega_n) = \frac{\mu^2 \gamma}{2\varepsilon_0 \hbar} \frac{\omega_n \left( \frac{\lambda_a}{\gamma_a} - \frac{\lambda_b}{\gamma_b} \right)}{(\omega_{ab} - \omega_n)^2 + \gamma^2 \left\{ 1 + \frac{\gamma_a + \gamma_b}{4\gamma\gamma_a\gamma_b} \left( \frac{\mu}{\hbar} \right)^2 E_n(t)^2 \right\}} - \frac{\omega_n}{2Q_n}$$

となり、線幅は  $\gamma$  から  $\gamma \sqrt{1 + \frac{\gamma_a + \gamma_b}{4\gamma\gamma_a\gamma_b} \left( \frac{\mu}{\hbar} \right)^2 E_n(t)^2}$  に広がることが分かる。これは利得飽和に伴う広がりと呼ばれる。

以上でレーザ発振の理論記述を終わる。