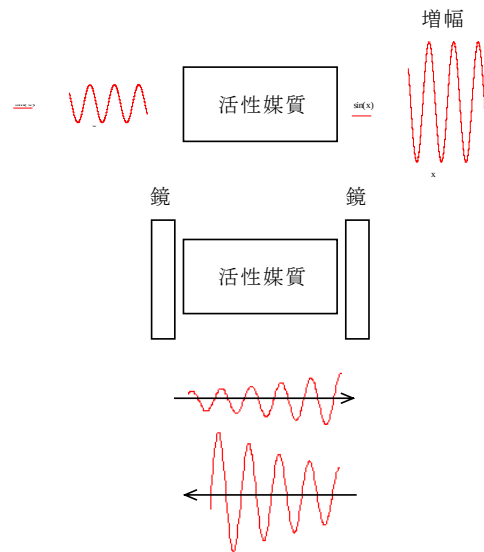


5. レーザ発振

活性媒質と光の共振器とを組み合わせることでレーザ発振が生じる様子を描写する。すなわち図のように活性媒質を反射鏡で挟むことにより電磁波は反射鏡間を往復し、活性媒質で増幅され、強度を強め、活性媒質の利得は低下してゆき、ある値に自動的に落ち着く。4は小信号解析で線形光増幅であったが、ここでは大信号解析を行い光強度が飽和し定常状態になる現象を扱う。



5. 1. 共振器固有モード

左鏡面の位置を $z=0$ 、右鏡面の位置を $z=L$ とし、両鏡面の間の空間での電磁界をマックスウェル方程式で記述する。上で導いた式で、電界ベクトルは x 成分のみ、平面波として x 方向、 y 方向での空間変化はない、とすると次となる。

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \mu_0 \sigma \frac{\partial E}{\partial t} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}$$

ここで左辺第二項は媒質に導電率 σ を与えて電磁波を減衰させている。これは共振器内で生じる回折損失、反射鏡透過（レーザ光の取り出し）による損失、等による光損失すべてを表すために付加した。

方程式の解法として、右辺の分極および左辺の損失項を取り除いた斉次方程式の解を求める。これは共振器の固有モードと呼ばれる。次に分極と損失を考慮して、これらの固有モードの振幅および位相の時間依存性を方程式を満足するように決める。

固有モードは次のようになる。

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0 \quad E(z, t) = \sin(Kz) \exp(-i\omega t) \quad -K^2 + \mu_0 \varepsilon_0 \omega^2 = 0$$

鏡面で電界は零になるとすると $\sin KL = 0$, $K_n = n \frac{\pi}{L}$ となる。 n は整数値である。

$K=2\pi/\lambda$ であることから、鏡と鏡の間の距離が半波長の整数倍になっていなければならないことに対応する。この境界条件から角周波数も離散化されて、 $\omega_n = cK_n$ となる。

固有モードの係数を時間の関数とし、複数の固有モードの重ね合わせで表す。

$$E(z, t) = \frac{1}{2} \sum_n E_n(t) \exp[-i\{\omega_n t + \phi_n(t)\}] \sin(K_n z) + c.c.$$

ここに、 $E_n(t)$ は n 番目の固有モードの展開係数の絶対値、 $-\phi_n(t)$ は展開係数の位相である。これらは電磁波の振動の一周期間ではほとんど変化しない、時間に対して緩やかに変化する関数である。c. c. はその前の項の複素共役を表す。電磁波は実数であるから複素共役を加えて実数にしておく必要がある（電気工学で用いる複素表示は使わない。量子力学の波動関数の時間因子 $\exp(i\omega t)$ は $\cos \omega t$ の複素表示ではなく、波動関数そのものである）。

なお、 $\omega_n + \dot{\phi}_n(t)$ がモード n の発振周波数となる。すなわち方程式を解くことでレーザの発振周波数が決まる。共振器固有モードの角周波数とは必ずしも一致しない。

5. 2. 分極による電界励振

分極は電界と同じ角周波数で振動することから次のように表せる。ただし $P_n(t)$ は複素数である ($E_n(t)$ は絶対値すなわち実数)。 $P_n(t)$ と $E_n(t)$ の位相関係に自由度をもたせておく。

$$P(z, t) = \frac{1}{2} \sum_n P_n(t) \exp[-i\{\omega_n t + \phi_n(t)\}] \sin(K_n z) + c.c.$$

これらを上の分極および損失を考慮した方程式に代入する。c. c. を除いた部分が関係式を満たせばc. c. 部分も同じ関係式を自動的に満たすことになるので、c. c. を除いた部分だけを扱う。 $\sin K_n z$ をかけて 0 から L まで z について積分することによりモード n についての式が得られる。

$$-2i\mu_0\varepsilon_0\omega_n\dot{E}_n + \left\{K_n^2 - i\mu_0\sigma\omega_n - \mu_0\varepsilon_0(\omega_n + \dot{\phi}_n)^2\right\}E_n = \mu_0\omega_n^2P_n$$

この導出において1次の微小項までを採り上げた。上に述べた時間的に緩やかに変動する関数の時間微分項は微小項であり、また損失、分極の項も微小項と見なした。

共振器の損失を表す量として Q 値がある。 σ と Q 値との関係は次のように表される。

$$Q\text{値} = \omega[\text{蓄積エネルギー}]/[\text{毎秒のエネルギー損失}] = \omega(\varepsilon_0 E^2/2)/(\sigma E^2/2) = \omega\varepsilon_0/\sigma$$

であるので、 $\sigma = \omega_n\varepsilon_0/Q_n$ を代入し、以後は損失をモードに依存する Q 値で表す。さらに共振器の波数と角周波数との関係を用いると、次のようになる。

$$-\frac{2i}{\omega_n}\dot{E}_n + \left\{1 - i\frac{1}{Q_n} - \left(1 + \frac{\dot{\phi}_n}{\omega_n}\right)^2\right\}E_n = \frac{1}{\varepsilon_0}P_n$$

実数部と虚数部それぞれが両辺で等しいことから、次の二つの方程式が成り立つ。

$$\dot{E}_n + \frac{\omega_n}{2Q_n}E_n = -\frac{\omega_n}{2\varepsilon_0}\text{Im}(P_n) \quad \omega_n + \dot{\phi}_n \approx \omega_n \left\{1 - \frac{1}{2\varepsilon_0}\text{Re}\left(\frac{P_n}{E_n}\right)\right\}$$

以上でモード n の電界振幅および振動周波数の式が得られた。振幅には分極の虚部が、周波数には分極の実部が関与する。

5. 3. 電界による分極励振

まず、上の式に含まれる分極を求める。4で行ったポピュレーション行列により表した分極を固有モード展開する。

$$P(z, t) = \mu(p_{ab} + c.c.) = \frac{1}{2} \sum_n P_n(t) \exp[-i\{\omega_n t + \phi_n(t)\}] \sin(K_n z) + c.c.$$

$$P_n(t) = 2 \exp[i\{\omega_n t + \phi_n(t)\}] \frac{\int_0^L \mu p_{ab} \sin(K_n z) dz}{\int_0^L \sin^2(K_n z) dz}$$

最後の式は固有モードの直交性を用いて導いた。ポピュレーション行列要素を求める必要があるが、これは4で求めた式、

$$p_{ab}(t) = \left(-i \frac{\mu}{\hbar}\right) \exp(-(i\omega_{ab} + \gamma)t) \int_0^t (p_{aa}(z, t') - p_{bb}(z, t')) E(z, t') \exp((i\omega_{ab} + \gamma)t') dt'$$

に5. 1. で求めた電界分布を代入して求める。今、共振器内には固有モード n がただ一つ存在するとする。回転波近似を用い、さらに $E_n(t)$, $\phi_n(t)$, $\rho_{aa}(z, t)$, $\rho_{bb}(z, t)$ は時間的に緩やかに変化するので、積分に実質的に寄与する時間幅、緩和時間 $1/\gamma$ 、での変化は無視できるものとする。

$$p_{ab}(t) = \frac{\mu}{2i\hbar} \exp(-i(\omega_n t + \phi_n(t))) E_n(t) \sin(K_n z) \frac{p_{aa}(z, t) - p_{bb}(z, t)}{i(\omega_{ab} - \omega_n) + \gamma}$$

これを上の式に代入して次を得る。

$$P_n(t) = \frac{\mu^2}{\hbar} \frac{\int_0^L \sin^2(K_n z) \{p_{aa}(z, t) - p_{bb}(z, t)\} dz}{\int_0^L \sin^2(K_n z) dz} \frac{(\omega_n - \omega_{ab}) - i\gamma}{(\omega_n - \omega_{ab})^2 + \gamma^2} E_n(t)$$