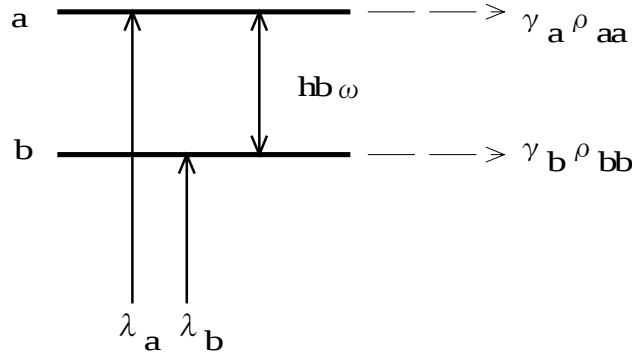


4. 5. ポピュレーション演算子で表した多数原子の状態

媒質は多数の二準位原子からなり、個々の原子に対応する密度演算子は $\rho(\alpha, z, t_0, t)$ で表す。これは時刻 t_0 、場所 z で状態 α (a または b) に励起された一つの原子の時刻 t における密度演算子の値を意味する。時刻 t_0 から t までの経緯は上で述べた密度演算子の運動方程式にしたがっている。単位体積あたり、単位時間あたりに α 状態に励起される原子数を励起速度 $\lambda_\alpha(z, t_0)$ で与える。そして、4. 4 で述べた緩和現象を、 ρ_{aa} の緩和係数を γ_a 、 ρ_{bb} の緩和係数を γ_b 、 ρ_{ab} の緩和係数を γ で表す。これを図示する。



分極は、一原子の分極の期待値の平均値 $\text{Tr}(\rho \mu)$ を、初期条件の異なるすべての原子について加算して表すことができる。すなわち、

$$\begin{aligned} P(z, t) &= \sum_{\text{初期条件の異なるすべての原子}} \text{Tr}(\rho \mu) = \int_{-\infty}^t dt_0 \sum_{\alpha=a,b} \lambda_\alpha(z, t_0) \text{Tr}(\rho(\alpha, z, t_0, t) \mu) \\ &= \text{Tr} \left\{ \left[\int_{-\infty}^t dt_0 \sum_{\alpha=a,b} \lambda_\alpha(z, t_0) \rho(\alpha, z, t_0, t) \right] \mu \right\} = \text{Tr}(p(z, t) \mu) \end{aligned}$$

ここに $p(z, t) = \sum_{\alpha=a,b} \int_{-\infty}^t dt_0 \lambda_\alpha(z, t_0) \rho(\alpha, z, t_0, t)$ をポピュレーション演算子と呼ぶ。これは密度演算子に原子数密度が掛けられたものである。密度演算子の代わりにこのポピュレーション演算子を用いてレーザを記述していく。例えば、 $p(z, t)_{aa}$ は時刻 t 、場所 z の媒質中で状態 a に見いだされる原子の密度である。

ポピュレーション演算子の運動方程式は密度演算子のそれから次のように導かれる。

$$\frac{d}{dt} p(z, t) = \sum_{\alpha=a,b} \lambda_\alpha(z, t) \rho(\alpha, z, t, t) + \sum_{\alpha=a,b} \int_{-\infty}^t dt_0 \lambda_\alpha(z, t_0) \frac{d}{dt} \rho(\alpha, z, t_0, t)$$

第一項の密度演算子の値は、励起された瞬間の値であるから $\rho(\alpha, z, t, t)_{kl} = \delta_{k\alpha} \delta_{l\alpha}$ であ

る。各要素の運動方程式に、密度演算子の運動方程式を用いることで、ポピュレーション行列要素の運動方程式は次のように導き出される。

$$\begin{aligned}\dot{p}_{aa} &= \lambda_a(z, t) - \gamma_a p_{aa} - i \frac{\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{E}(z, t)}{\hbar} (p_{ab} - p_{ba}) & \dot{p}_{bb} &= \lambda_b(z, t) - \gamma_b p_{bb} - i \frac{\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{E}(z, t)}{\hbar} (p_{ba} - p_{ab}) \\ \dot{p}_{ab} &= -i\omega_{ab} p_{ab} - \gamma p_{ab} - i \frac{\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{E}(z, t)}{\hbar} (p_{aa} - p_{bb}) & \dot{p}_{ba} &= \dot{p}_{ab}^*\end{aligned}$$

演習 4. 5.

上の式を導出せよ。

ヒント：ポピュレーション行列要素の式

$$\dot{p}(z, t)_{aa} = \sum_{\alpha=a,b} \lambda_{\alpha}(z, t) \delta_{a\alpha} \delta_{a\alpha} + \sum_{\alpha=a,b} \int_{-\infty}^t dt_0 \lambda_{\alpha}(z, t_0) \dot{\rho}(\alpha, z, t_0, t)_{aa}$$

等に密度演算子の運動方程式

$$\frac{d\rho_{aa}}{dt} = -\gamma_a \rho_{aa} - i(\rho_{ab} - \rho_{ba}) \frac{\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{E}}{\hbar}$$

等を組み込め。

密度演算子の運動方程式と見比べるとポンプ項が加わっている点のみ異なるだけで、あとは同じ形である。ポピュレーション行列はポンプ項を取り込むために導入したものである。

この方程式を解いて p を求め、分極 $P(\mathbf{z}, t) = \text{Tr}(p \boldsymbol{\mu})$ を計算し、マクスウェル方程式に基づいて電界 $E(\mathbf{z}, t)$ を求める。電界が再び分極に影響を与える。これらの結合した方程式を解くことによりレーザー動作が記述される。

4. 6. 媒質中の光伝搬

ポピュレーション行列の非対角要素 p_{ab} に着目し、3 番目の微分方程式を形式的に解く。

$$p_{ab} = \exp\left(-\left(i\omega_{ab} + \gamma\right)t\right) \int_0^t \left(-i \frac{\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{E}(z, t')}{\hbar}\right) (p_{aa} - p_{bb}) \exp\left(\left(i\omega_{ab} + \gamma\right)t'\right) dt'$$

ただし、初期条件として時刻 0 で $p_{ab} = 0$ を用いた。

ここで電磁波を $\mathbf{E}(z, t') = \mathbf{e}A(z)\cos(\omega t' - \beta z)$ とする。ここに $\mathbf{e}$ は偏波方向の単位ベクトル、 ω は電磁波の角周波数である。これを積分式に代入して計算するが、電磁波の振幅が十分に小さくポピュレーション変化は無視できる、 $\exp(-\gamma t) \ll 1$ が成り立つ程、考えている時間スケールは十分に大きい、を仮定する。このとき、

$$\begin{aligned} p_{ab} &= \exp\left(-\left(i\omega_{ab} + \gamma\right)t\right) \left(-i \frac{\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{e}}{\hbar}\right) (p_{aa} - p_{bb}) A(z) \\ &\quad \int_0^t \frac{1}{2} \left\{ \exp\left(i((\omega + \omega_{ab})t' - \beta z)\right) + \exp\left(-i((\omega - \omega_{ab})t' - \beta z)\right) \right\} \exp(\gamma t') dt' \\ &= -i \frac{\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{e}}{2\hbar} (p_{aa} - p_{bb}) A(z) \frac{\exp(-i\omega t + i\beta z)}{i(\omega_{ab} - \omega) + \gamma} \end{aligned}$$

時間積分の被積分関数で大きな角周波数で振動する項はそうでない項に比べて積分への寄与が小さいので、省略する（回転波近似）。{ } 内の第一項を省略して積分を行っている。これを用いて分極は次になる。

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(z, t) &= \text{Tr}(p\boldsymbol{\mu}) = \boldsymbol{\mu}(p_{ab} + c.c.) \\ &= \boldsymbol{\mu} \frac{\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{e}}{\hbar} (p_{aa} - p_{bb}) A(z) \frac{(\omega - \omega_{ab})\cos(\omega t - \beta z) - \gamma \sin(\omega t - \beta z)}{(\omega_{ab} - \omega)^2 + \gamma^2} \end{aligned}$$

この分極を波動方程式に代入すると、

$$\begin{aligned} \nabla^2 \{ \mathbf{e}A(z)\cos(\omega t - \beta z) \} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{ \mathbf{e}A(z)\cos(\omega t - \beta z) \} \\ = \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\boldsymbol{\mu} \frac{\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{e}}{\hbar} (p_{aa} - p_{bb}) A(z) \frac{(\omega - \omega_{ab})\cos(\omega t - \beta z) - \gamma \sin(\omega t - \beta z)}{(\omega_{ab} - \omega)^2 + \gamma^2} \right] \end{aligned}$$

今、電磁波は平面波であり、直線偏光とし偏波方向は x 方向とする。原子の分極も x 方向に生じているとする。さらに電磁波の振幅 $A(z)$ の二階微分はその他の項に比べて小さいとして省略する。このとき、

$$\begin{aligned} 2\beta \frac{1}{A(z)} \frac{dA(z)}{dz} \sin(\omega t - \beta z) + (\mu_0 \varepsilon_0 \omega^2 - \beta^2) \cos(\omega t - \beta z) \\ = \mu_0 \frac{\mu^2}{\hbar} (p_{aa} - p_{bb}) \frac{\omega^2}{(\omega_{ab} - \omega)^2 + \gamma^2} \{(\omega_{ab} - \omega) \cos(\omega t - \beta z) + \gamma \sin(\omega t - \beta z)\} \end{aligned}$$

となる。この式が成り立つためには **cos** および **sin** の係数がおのの両辺で等しくなければならぬから、

$$\beta^2 = \mu_0 \varepsilon_0 \omega^2 - \mu_0 \frac{\mu^2}{\hbar} (p_{aa} - p_{bb}) \frac{\omega^2 (\omega_{ab} - \omega)}{(\omega_{ab} - \omega)^2 + \gamma^2}$$

$$\frac{dA(z)}{dz} = \mu_0 \frac{\mu^2}{2\beta \hbar} (p_{aa} - p_{bb}) \frac{\omega^2 \gamma}{(\omega_{ab} - \omega)^2 + \gamma^2} A(z)$$

を得る。第二の式を解いて振幅は次になる。

$$A(z) = A(0) \exp \left[\mu_0 \frac{\mu^2}{2\beta \hbar} (p_{aa} - p_{bb}) \frac{\omega^2 \gamma}{(\omega_{ab} - \omega)^2 + \gamma^2} z \right]$$

レーザ媒質内を電磁波が伝搬する伝搬定数は、電界と同位相で振動する分極成分によって決まり、振幅の変化は電界と 90 度位相がずれて振動する成分によって決まる。

振幅は指数関数で変化し、利得は $\beta \approx \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \omega$ を用いて次となる。

$$\alpha \approx \frac{\mu^2}{2\varepsilon_0 c \hbar} (p_{aa} - p_{bb}) \frac{\omega \gamma}{(\omega_{ab} - \omega)^2 + \gamma^2}$$

以上、量子力学を用いて、媒質中を伝搬する電磁波が媒質から受ける影響を記述した。この結果の意味を以下で調べることにする。

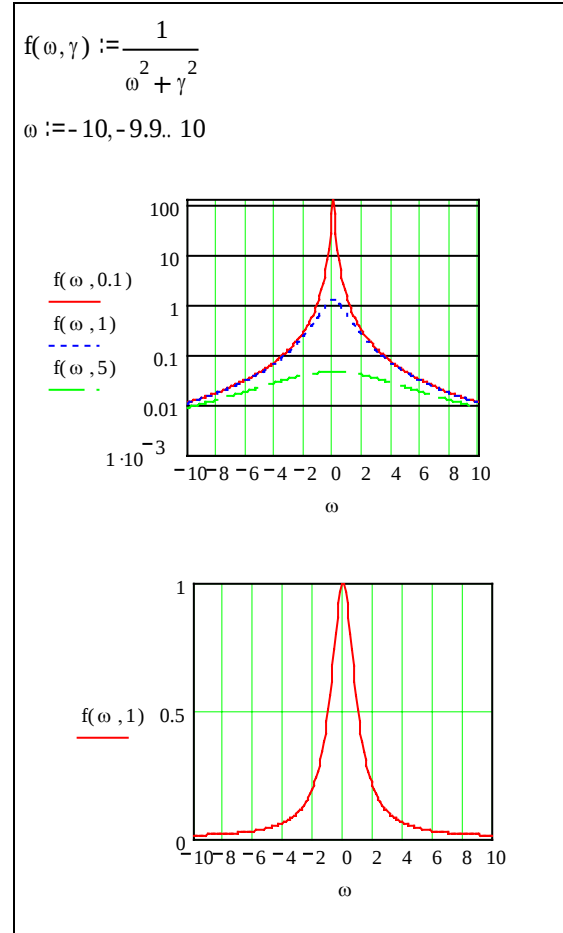
4. 7. 利得と屈折率

活性媒質中の電磁波伝搬について得られた結果を調べる。

(1) 利得スペクトル（線幅広がり特性）

スペクトル形状は $\frac{1}{(\omega_{ab} - \omega)^2 + \gamma^2}$ で表される。これはローレンツ形と呼ばれる。中心角周波数 ω_{ab} は二準位間のエネルギー差で決まり、また線幅は緩和係数 γ で決まる。利得のピーク値に対する半値全幅 $\Delta \omega$ は 2γ に等しい。

ローレンツ形の線幅広がりとは緩和過程により生じるものであり、均一な広がりと呼ぶ。これと対照的な、不均一な広がりとは、少しずつ異なるエネルギー差をもつ二準位原子が混じって存在する場合の利得のスペクトルで生じる。不均一、均一の名前の由来は、ある周波数の電磁波が利得媒質を通過して増幅が行われると、その反作用で媒質の利得が減少するが、均一広がりの場合にはすべての周波数で均一に利得減少が生じ、不均一広がりの場合には増幅に関与した原子の利得だけが減少するので、全体の利得スペクトルの一部の利得だけが不均一に減少する、ことによる。



(2) 利得の大きさ

利得は $\alpha \propto \mu^2 (p_{aa} - p_{bb})$ であり、ダイポールモーメント μ の二乗に比例し、高エネルギー準位の原子数と低エネルギー準位の原子数の差に比例する。高エネルギー準位の原子数の方が多いときに正の利得（利得）が、少ないときに負の利得（損失）が生じる。電界が十分に小さい場合には、それぞれの原子数の定常値は次となる。

$$\dot{p}_{aa} = \lambda_a(z, t) - \gamma_a p_{aa} = 0 \quad \dot{p}_{bb} = \lambda_b(z, t) - \gamma_b p_{bb} = 0 \quad \therefore \quad p_{aa} = \frac{\lambda_a}{\gamma_a}, \quad p_{bb} = \frac{\lambda_b}{\gamma_b}$$

各準位への励起とそれぞれの緩和係数によって決まる。上の準位への励起、ポンピング、

を増すことにより利得を増大させることができる。

熱平衡状態においてはエネルギー E の状態を占めている原子の数はボルツマン分布 $\exp(-E/kT)$ に比例し、エネルギーが高い状態にある原子数は低い状態の原子数よりも少ない。利得が生じるのはこの関係が逆転した場合である。すなわち熱平衡状態ではなく、高エネルギー状態に速く励起し、低エネルギー状態の原子をさらに低いエネルギー状態に遷移させるなどの方法でその数を減少させることではじめて実現される。逆転した分布を反転分布と呼ぶ。またボルツマン分布で温度を負にした場合に相当することから負温度状態とも呼ぶ。

ダイポールモーメント μ は原子のポテンシャル分布により決まる電子波動関数分布によってきまる。

(3) 利得に伴う屈折率変化

媒質の屈折率が変化する。すなわち、

$$n \equiv \frac{\beta}{\omega} \approx 1 + \frac{\mu^2}{2\varepsilon_0 \hbar} (p_{aa} - p_{bb}) \frac{\omega - \omega_{ab}}{(\omega_{ab} - \omega)^2 + \gamma^2}$$

この屈折率変化の概略図を示す。縦軸は屈折率変化分に比例する値、横軸は原子の共鳴角周波数を原点にした角周波数である。

一般に媒質の屈折率は周波数が増加すると増加する傾向がある（図の破線）。これを正常分散と呼ぶ。ところが二準位損失媒質の共鳴点直近や、あるいは利得がある場合（実線）の共鳴点直近以外では逆の傾向を示す。これを異常分散と呼ぶ。

利得と屈折率の表式から、利得（吸収）と分散とは互いに関連があり、利得（吸収）が大きいと分散も大きいことが分かる。

ここまでで媒質と電磁波との相互作用を取り扱い、電磁波が活性媒質により増幅されることを述べた。

