

光・量子電子工学

古屋一仁

1 . 本講義「光・量子電子工学」とは	3
第一部 レーザの基礎	4
2 . 光と物質のコヒーレント相互作用	4
2 . 1 . 相互作用ハミルトニアン	4
2 . 2 . 振動電気双極子	4
2 . 3 . 光と原子の相互作用の原理	8
3 . 密度行列法による統計的取り扱い	11
3 . 1 . 密度行列法とは	11
3 . 2 . 二重の統計性	11
3 . 3 . 密度演算子	12
3 . 3 . 1 量子力学復習	12
3 . 3 . 2 密度演算子	13
3 . 4 . 密度演算子行列要素の運動方程式	14
3 . 5 . 密度行列要素とその初期条件	15
4 . 光と物質の緩和を考慮した相互作用	16
4 . 1 . 分極による電磁波励振	16
4 . 2 . 密度演算子で表した分極	17
4 . 3 . 電界中での密度演算子	17
4 . 4 . 不規則擾乱による密度演算子緩和	18
4 . 5 . ポピュレーション演算子で表した多数原子の状態	19
4 . 6 . 媒質中の光伝搬	21
4 . 7 . 利得と屈折率	23
5 . レーザ発振	25
5 . 1 . 共振器固有モード	26
5 . 2 . 分極による電界励振	27
5 . 3 . 電界による分極励振	28
5 . 4 . 電磁波と原子の結合方程式	29
5 . 5 . 定常発振状態	31
5 . 6 . レーザ発振しきい値	32
5 . 7 . 周波数引っ張り現象	33
5 . 8 . 利得スペクトル線幅広がり	33

第二部 量子ナノエレクトロニクスの基礎	34
6 . 周期ポテンシャルとブロッホ関数	34
7 . クローニッヒ・ペニー・モデル (厳密数値解)	37
7 . 1 ブロッホ関数定式化	37
7 . 2 分散関係と波動関数の数値解	38
7 . 3 バンドギャップと定在波	39
7 . 4 結晶中電子の奇異な振る舞いの起源	40
8 . 結合波理論による近似解析	41
8 . 1 ブラッグ反射係数によるブロッホ関数表現	41
8 . 2 有効質量	43
8 . 3 分散関係	44
8 . 4 ブラッグ反射係数	44
8 . 5 平均確率密度と確率流密度	44
8 . 6 波束の運動速度	46
9 . ヘテロ接合ナノ構造中の電子	49
9 . 1 ヘテロ界面での境界条件	49
9 . 2 ヘテロナノ構造中電子の行列解析	50
9 . 3 放物線近似	52
9 . 4 有効質量近似方程式	53
9 . 5 非放物線特性を取り入れた有効質量近似方程式	55
9 . 6 ヘテロ接合境界でのブロッホ関数接続の様子	56
9 . 7 結合波近似解析、有効質量近似方程式解析 (放物線、非放物線性補正) 比較	57
10 . 半導体中の非熱平衡電子波伝搬実証	61

1. 本講義「光・量子電子工学」とは

講義概要

レーザと量子効果エレクトロニクスについて講義する。レーザは既に実用化、量子効果エレクトロニクスはこれから。第一部ではレーザの原理として光と物質との相互作用を量子力学で説明、第二部では結晶中の電子の振る舞いを調べエレクトロニクス応用を探る。

講義の進め方・成績評価については、宿題を出すので必ず毎回勉強して提出すること。成績は提出した宿題と期末評価とで総合評価する。

参考書

- ・ D. Marcuse; Engineering Quantum Electrodynamics, Harcourt, Brace & World Inc., 1970
- ・ M. Sargent, M. O. Scully, W. E. Lamb; Laser Physics, Addison-Wesley Publishing Company, 1974
- ・ 旧版テキスト：2002 年度まで使用

平成 20 年度 講義スケジュール

4/14	第 1 回	光と物質のコヒーレント相互作用	2.1、2.2
4/21	第 2 回	光と物質のコヒーレント相互作用	2.2
4/28	第 3 回	光と物質のコヒーレント相互作用	2.3
5/12	第 4 回	密度行列法による統計的取り扱い	3.1、3.2、3.3
5/19	第 5 回	密度行列法による統計的取り扱い	3.4、3.5
5/28	第 6 回	光と物質の緩和を考慮した相互作用	4.1、4.2、4.3、4.4
6/02	第 7 回	光と物質の緩和を考慮した相互作用	4.5、4.6、4.7
6/09	第 8 回	レーザ発振	5.1、5.2、5.3
6/16	第 9 回	レーザ発振	5.4、5.5、5.6、5.7、5.8
6/23	第 10 回	周期ポテンシャルとブロッホ関数	6、7
6/30	第 11 回	クローニッヒペニーモデル厳密解	7
7/07	第 12 回	結合波理論による近似解析	8
7/14	第 13 回	ヘテロ接合ナノ構造中の電子	9
7/24	第 14 回	半導体中の電子波伝搬観測実験	10

第一部 レーザの基礎

2. 光と物質のコヒーレント相互作用

量子力学の説明（復習）はまとめて述べることはしない。各所で量子力学の原理、考え方を確認しながら進む。そのための演習を準備した。

ハミルトン力学に量子論の要請を課して量子力学が組み立てられる過程に興味がある者は旧版参照。

2.1. 相互作用ハミルトニアン

電界が存在する空間での電子のハミルトニアンは次で与えられる。

$$H = H_0 + H_{\text{int}}$$

右辺の第一項は電界が無いときの電子のハミルトニアン $H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V$

ここに m は電子質量、 V は静電ポテンシャルである。

第二項は電界と電子との相互作用を表す相互作用ハミルトニアン $H_{\text{int}} = -e\mathbf{r} \cdot \mathbf{E} = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{E}$

ここに e は電子電荷（マイナス値）、 $\mathbf{r}$ は電子の位置、 $\boldsymbol{\mu} (=e\mathbf{r})$ をダイポールモーメントと呼ぶ。

相互作用ハミルトニアンが上の形になる根拠は説明省略。興味がある者は旧版参照。

2.2. 振動電気双極子

孤立二準位原子と電磁波との相互作用を考える。電磁波は量子化せずに古典的に扱う（半古典論）。電子の波動関数 ψ は次のシュレーディンガーの方程式を満たす。

$$i\hbar \frac{d\psi}{dt} = (H_0 + H_{\text{int}}) \psi$$

この解を調べよう。まずは相互作用がない場合から。方程式とその解は次のようになる。

$$i\hbar \frac{d\psi}{dt} = H_0 \psi \quad \psi = \exp\left(-i \frac{E_n}{\hbar} t\right) \phi_n(\mathbf{r})$$

ただし $\phi_n(\mathbf{r})$ は次の時間を含まない次の固有値方程式の固有関数である。

$$H_0 \phi_n(\mathbf{r}) = E_n \phi_n(\mathbf{r})$$

今、二準位系、すなわちエネルギー固有値が E_1 と E_2 の二つのエネルギー固有状態のみを考える。原子の周りに存在する電子の状態は、一般に、固有関数の重ね合わせで表される。固有関数は二つのみなので次の形になる。

$$\psi = a_1 \exp\left(-i \frac{E_1}{\hbar} t\right) \phi_1(\mathbf{r}) + a_2 \exp\left(-i \frac{E_2}{\hbar} t\right) \phi_2(\mathbf{r})$$

ここに a_1 および a_2 は展開係数である。この式を用いて電子の位置の期待値 $\langle \mathbf{r} \rangle$ は次式で表される。

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{r} \rangle &= \iiint \psi^* \mathbf{r} \psi d\mathbf{r} \\ &= |a_1|^2 \iiint \phi_1^* \mathbf{r} \phi_1 d\mathbf{r} + |a_2|^2 \iiint \phi_2^* \mathbf{r} \phi_2 d\mathbf{r} + 2 \operatorname{Re} \left[a_1^* a_2 \exp\left(i \frac{E_1 - E_2}{\hbar} t\right) \iiint \phi_1^* \mathbf{r} \phi_2 d\mathbf{r} \right] \end{aligned}$$

となる。

ところで $\iiint \phi_1^* \mathbf{r} \phi_1 d\mathbf{r} = \iiint \phi_2^* \mathbf{r} \phi_2 d\mathbf{r} = 0$ である。これを 1 次元問題で説明する。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_1^* x \phi_1 dx = \int x |\phi_1(x)|^2 dx$$

ポテンシャルが空間的に対称分布しているときには固有関数 $\phi_1(x)$ は、 $x=0$ に関して対称(偶関数)あるいは反対称関数(奇関数)となる(パリティをもつ)。したがって $|\phi_1(x)|^2$ は偶関数であり、上の式の被積分関数は奇関数である。奇関数を $-\infty$ から ∞ まで積分すると 0 となるからである。同様にして $\iiint \phi_2^* \mathbf{r} \phi_2 d\mathbf{r} = 0$ も成り立つ。

固有関数に適当な位相因子をかけることができるから $\iiint \phi_1^* \mathbf{r} \phi_2 d\mathbf{r}$ を実数にすることができる。 $a_1^* a_2 = |a_1^* a_2| \exp(i\phi)$ 、 $\omega_0 = \frac{E_2 - E_1}{\hbar}$ とおくと、電子位置の期待値は次になる。

$$\langle \mathbf{r} \rangle = \iiint \psi^* \mathbf{r} \psi d\mathbf{r} = 2 |a_1^* a_2| \left(\iiint \phi_1^* \mathbf{r} \phi_2 d\mathbf{r} \right) \cos(\omega_0 t - \phi)$$

演習 2 - 2 (量子力学の確認)

- 1 A 君は $\iiint \psi^* \mathbf{r} \psi d\mathbf{r}$ は「位置 $\mathbf{r}$ に電子が見いだされる確率」と考えた。A 君の量子力学は正しいか。もし違うなら、これの正確な意味を述べよ。そして「位置 $\mathbf{r}$ (の近傍の微小体積 ΔV 中) に電子が見いだされる確率」はどう表されるか？答えよ。
- 2 ポテンシャルが対称だと固有関数がパリティをもつことを証明せよ。
- 3 「固有関数に適当な位相因子をかけることができる」のは何故か？またそうすることで $\iiint \phi_1^* \mathbf{r} \phi_2 d\mathbf{r}$ を実数にすることができるのはどうしてか？説明せよ。
- 4 イメージを具体的にするために 1 次元で考えて

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^* x \psi dx = 2 |a_1^* a_2| \left(\int_{-\infty}^{\infty} \phi_1^* x \phi_2 dx \right) \cos(\omega_0 t - \phi)$$
を時間に対してプロットせよ。何かが振動している。まず角周波数は何によって決まるか？次に縦軸は何か？
- 5 B 君は上の振動について「電子の状態が二つの準位の間を行ったり来たりしているのだ」と考えた。彼は正しいか。もし違うなら何が振動しているのか説明せよ。
- 6 展開係数 a_1 か a_2 のいずれかが零の場合は上の振動は停止することを確かめよ。振動は電子がどういう状態の時に起きるのか説明せよ。
- 7 以上を考えた後に「孤立二準位原子は二つの準位のいずれにも存在確率がある場合に、電子は空間的に振動する。振動周波数は二準位間のエネルギー差で決まる。」を確認せよ。

上で得た「電子が空間的に振動する」事実を別の方法で調べよう。1次元にして電子が x の位置に見出される確率を調べると次になる。

$$|\psi|^2 = \left| a_1 \exp\left(-i \frac{E_1}{\hbar} t\right) \phi_1(x) + a_2 \exp\left(-i \frac{E_2}{\hbar} t\right) \phi_2(x) \right|^2 = \left| a_1 \exp(i\omega_0 t) \phi_1(x) + a_2 \phi_2(x) \right|^2$$

ここで $\phi_1(x)$ および $\phi_2(x)$ はそれぞれエネルギー固有状態 1 および 2 の波動関数。ポテンシャルが対称なのでそれぞれ偶および奇関数である。