第 3 章 :ダイナミカルシステムの過渡応答と安定性

3.5 ダイナミカルシステムの安定性

キーワード： 安定性, ラウスの安定判別法

学習目標:システムが安定か否かを伝達関数の係数から簡単に判別するラウスの安定判別法を習得する.

準備

ダイナミカルシステム

図 2.1 ダイナミカルシステム

伝達関数

$$\text{伝達関数} = \frac{\text{出力のラプラス変換}}{\text{入力のラプラス変換}}$$

例. $G(s) = \dfrac{1}{s^2 + s + 1}$

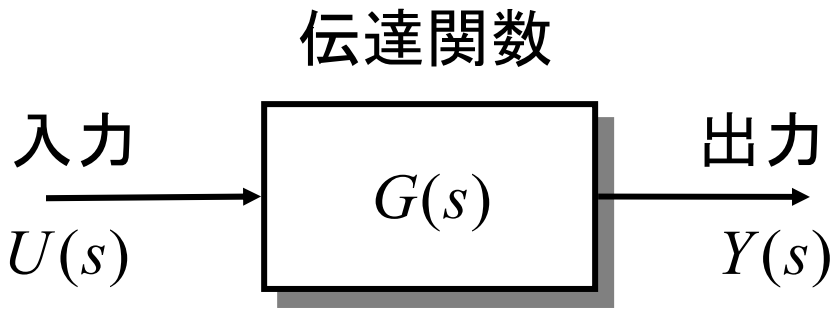


図 2.7 伝達関数

［伝達関数の例］

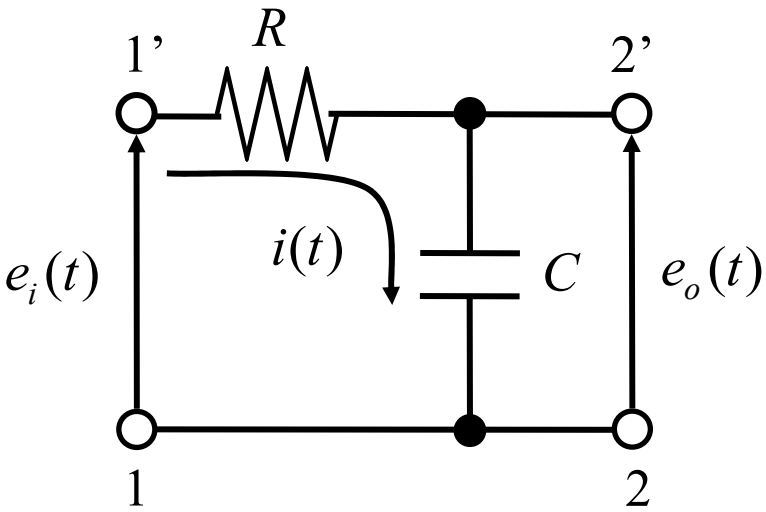
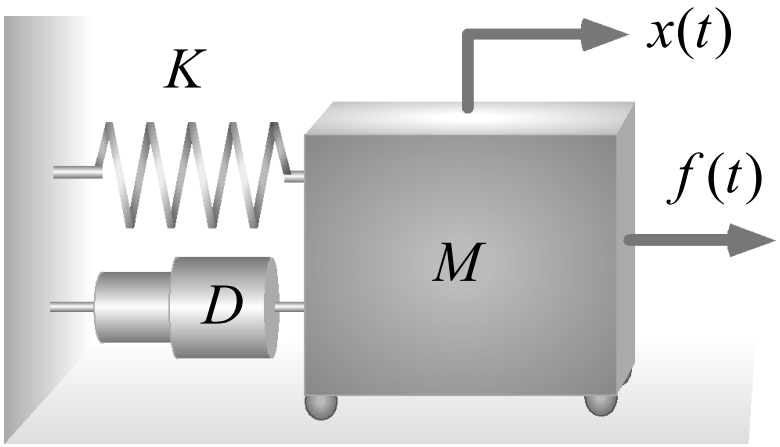


図 2.8　RC回路

$$G(s) = \frac{1}{RCs + 1}$$



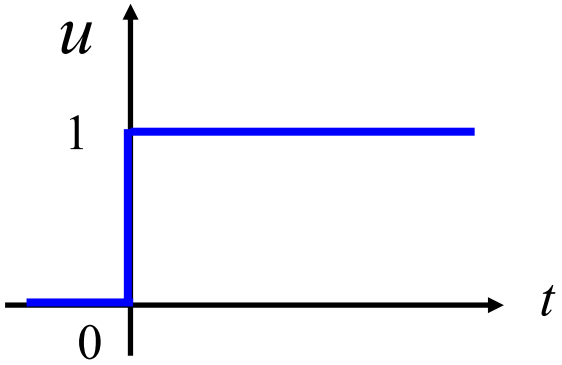
$$G(s) = \frac{1}{Ms^2 + Ds + K}$$

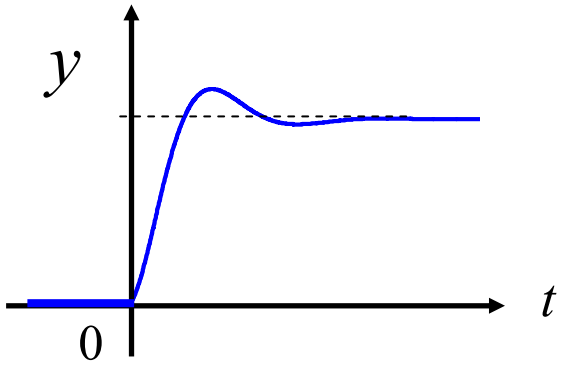
図 2.3　質量ーばねーダンパ系

3.5 ダイナミカルシステムの安定性

安定性

ステップ入力に対する応答が，一定値に収束すること





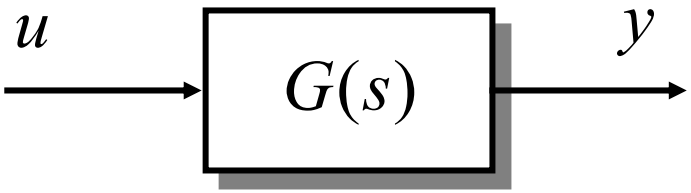


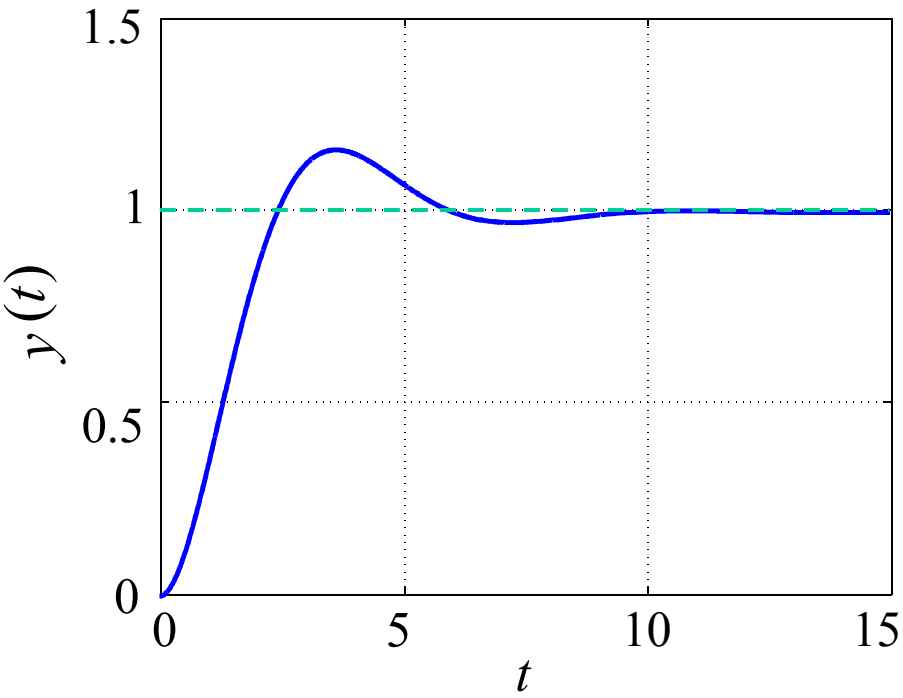
図 3.1　ダイナミカルシステム

安定でない　＝　不安定

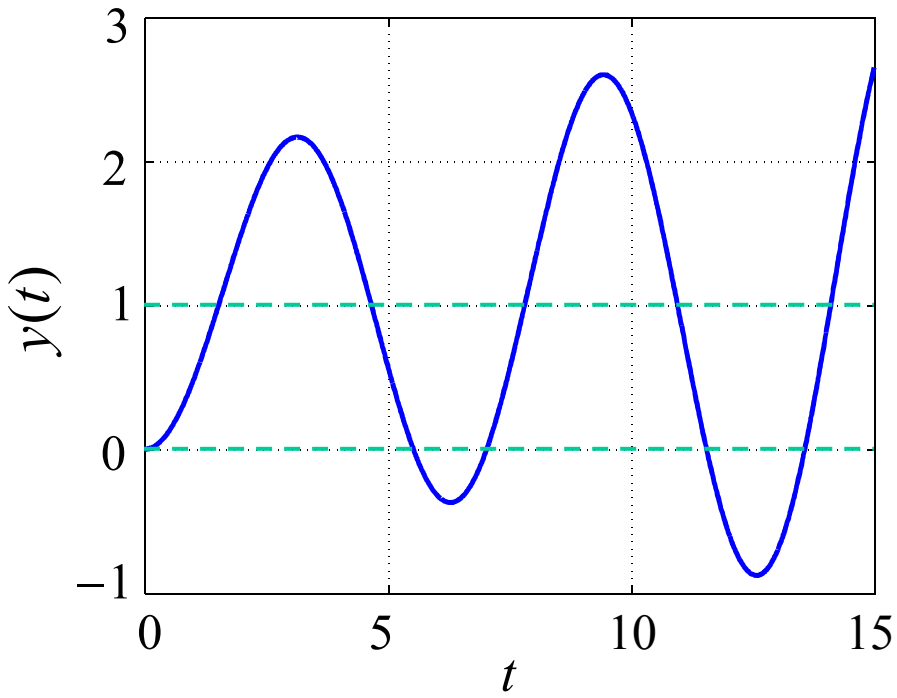
[例]

$$G_a(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

$$G_b(s) = \frac{1}{s^2 - 0.1s + 1}$$



（a） 安定なシステムの応答



（b） 不安定なシステムの応答

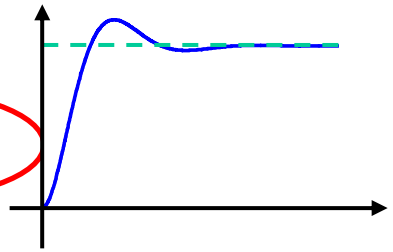
図 3.14 ステップ応答例

極を調べる

極：(伝達関数の分母多項式) = 0 の根

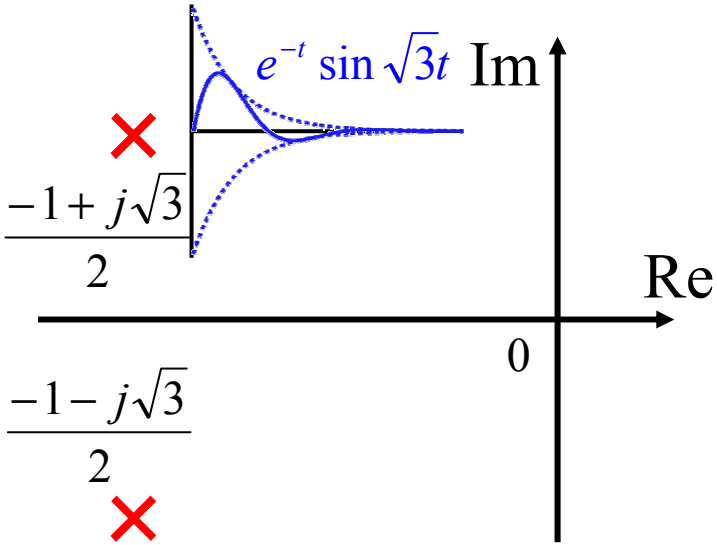
(a) 安定なシステム

$$G_a(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$



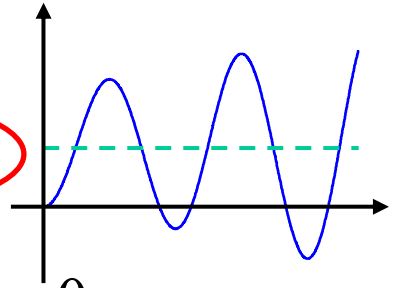
$$s^2 + s + 1 = 0$$

$$s = \frac{-1 \pm j\sqrt{3}}{2}$$ ，j：虚数単位



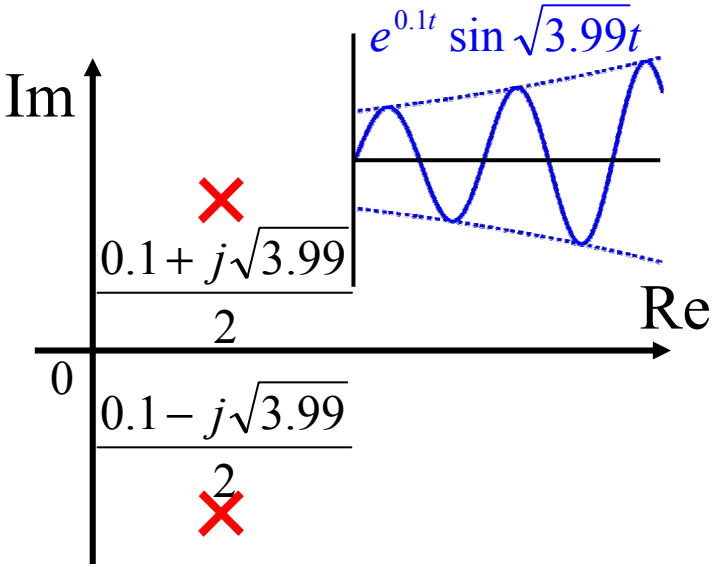
(b) 不安定なシステム

$$G_b(s) = \frac{1}{s^2 - 0.1s + 1}$$



$$s^2 - 0.1s + 1 = 0$$

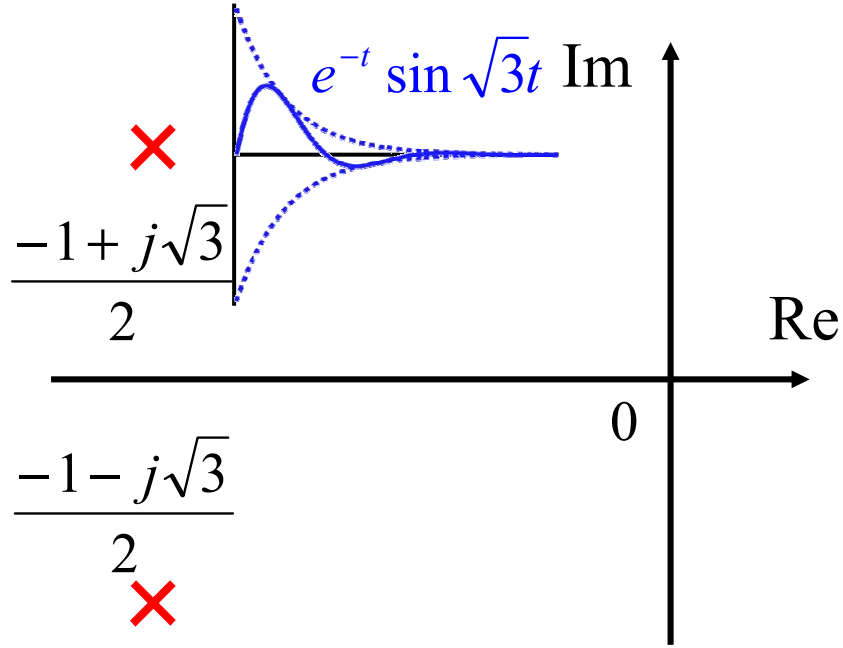
$$s = \frac{0.1 \pm j\sqrt{3.99}}{2}$$



安定なシステム

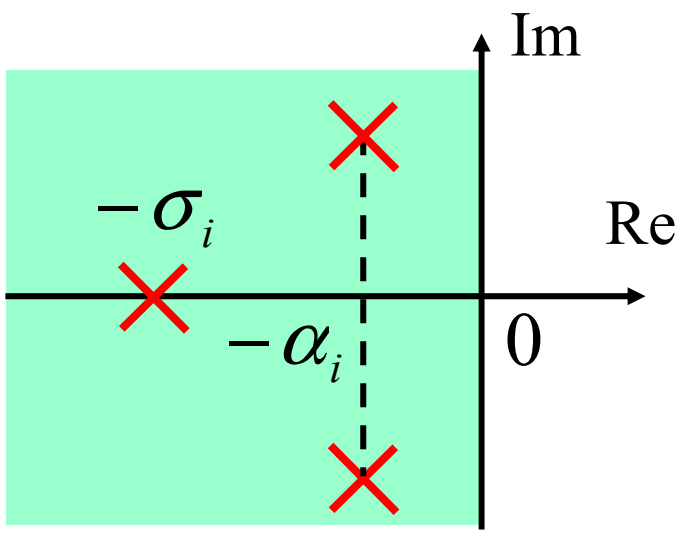
$$G_a(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

$$s = \frac{-1 \pm j\sqrt{3}}{2}$$



安定性の必要十分条件

（条件A） すべての極の実部が負



$$D(s) = s^2 + a_1 s + a_0$$

$$s^2 + a_1 s + a_0 = 0$$

$$(s + \lambda_1)(s + \lambda_2) = 0$$

$$\begin{cases} a_1 = \lambda_1 + \lambda_2 \\ a_0 = \lambda_1 \lambda_2 \end{cases} \Rightarrow a_1, a_2 > 0$$

$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 \qquad (a_n > 0)$$

$$= a_n \prod_{i=1}^{M} (s + \sigma_i) \prod_{i=1}^{N} (s^2 + 2\alpha_i s + (\alpha_i^2 + \omega_i^2))$$

（条件A） $\sigma_i > 0, \ \alpha_i > 0$

安定性の必要条件

（条件B） すべての係数 $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_0$ が正

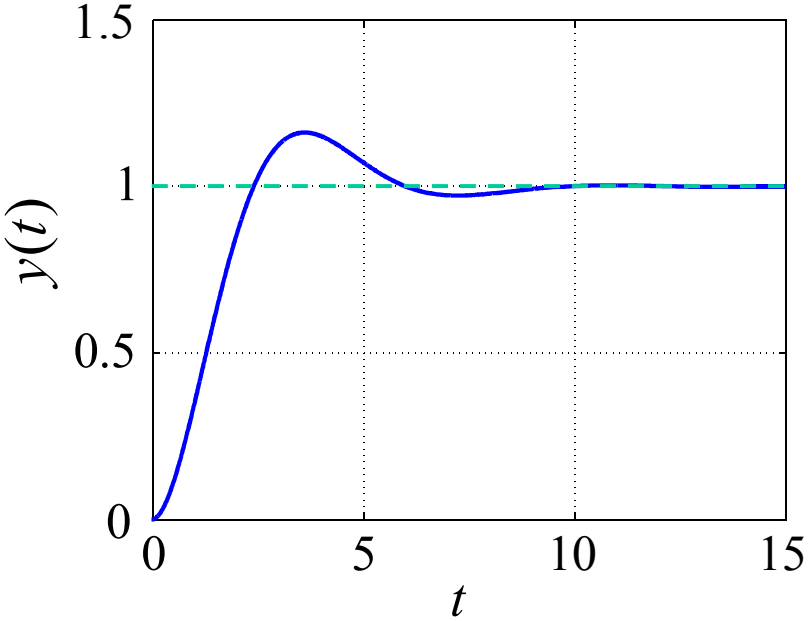
安定性の必要条件

（条件B） すべての係数 $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_0$ が正

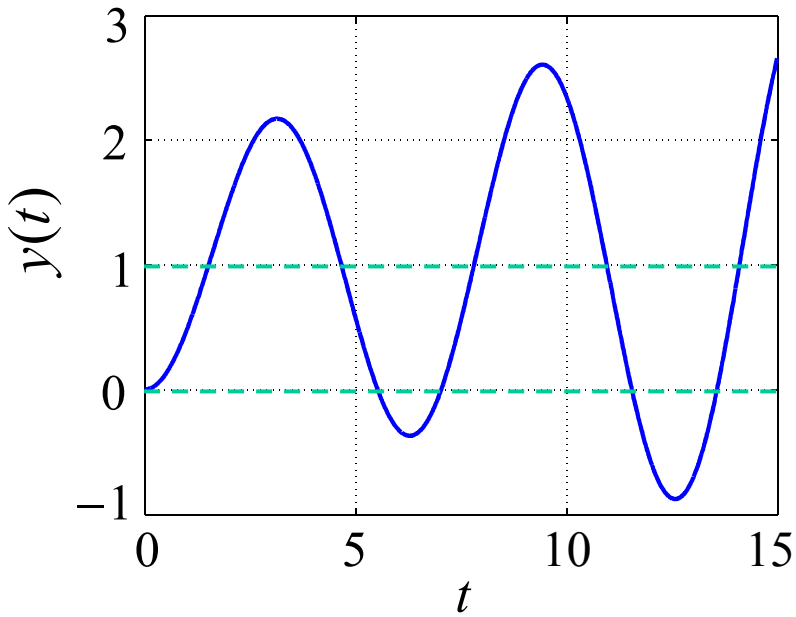
[例]

$$G_a(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

$$G_b(s) = \frac{1}{s^2 \underline{-0.1}s + 1}$$



（a） 安定なシステムの応答



（b） 不安定なシステムの応答

図 3.14 ステップ応答例

[例]（必要性）

$$D_1(s) = s^5 + s^4 + 3s^3 + 2s^2 + 6s + 2$$ （条件B：OK）

$$+1 \quad +1 \quad +3 \quad +2 \quad +6 \quad +2$$

$$D_2(s) = s^5 + s^4 + 6s^3 + 3s^2 + 4s + 1$$ （条件B：OK）

$$+1 \quad +1 \quad +6 \quad +3 \quad +4 \quad +1$$

共に安定か？

$D_1(s) = 0$ の根

$\underline{0.56 \pm 1.37j,}$ $-0.89 \pm 1.33j,$ -0.35 不安定

$D_2(s) = 0$ の根

$-0.26 \pm 2.21j,$ $-0.10 \pm 0.85j,$ -0.28 安定

安定性の必要条件

（条件B） すべての係数 $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_0$ が正

ラウスの安定判別法

$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0 \qquad (a_n > 0)$$

ラウス表

s^n	R_{11}	R_{12}	R_{13}	R_{14}	$\cdots$
	a_n	a_{n-2}			
s^{n-1}	R_{21}	R_{22}	R_{23}	R_{24}	$\cdots$
	a_{n-1}	a_{n-3}			
s^{n-2}	R_{31}	R_{32}	R_{33}	$\cdots$	$\cdots$
s^{n-3}	R_{41}	R_{42}	R_{43}	$\cdots$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
s^2	$R_{n-1\ 1}$	$R_{n-1\ 2}$	0		
s	$R_{n\ 1}$	0			
s^0	$R_{n+1\ 1}$	0			

（存在しない項は 0）

$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0 \qquad (a_n > 0)$$

ラウス表

s^n	R_{11}	R_{12}	R_{13}	R_{14}	$\cdots$
s^{n-1}	R_{21}	R_{22}	R_{23}	R_{24}	$\cdots$
s^{n-2}	R_{31}	R_{32}	R_{33}	$\cdots$	$\cdots$
s^{n-3}	R_{41}	R_{42}	R_{43}	$\cdots$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
s^2	$R_{n-1\ 1}$	$R_{n-1\ 2}$	0		
s	$R_{n\ 1}$	0			
s^0	$R_{n+1\ 1}$	0			

a_n a_{n-2} a_{n-1} a_{n-3}

$$R_{31} = \frac{R_{21}R_{12} - R_{11}R_{22}}{R_{21}}$$

$$R_{32} = \frac{R_{21}R_{13} - R_{11}R_{23}}{R_{21}}$$

$$R_{41} = \frac{R_{31}R_{22} - R_{21}R_{32}}{R_{31}}$$

$$R_{42} = \frac{R_{31}R_{23} - R_{21}R_{33}}{R_{31}}$$

ラウス数列

安定性の必要十分条件

（条件R）　(i)ラウス数列がすべて正

(ii)条件Bが成立

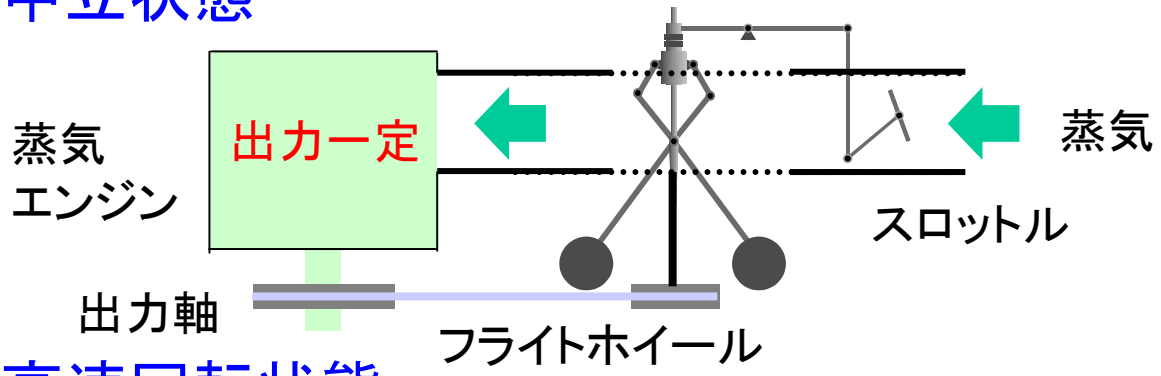
ラウス数列の正負の符号の反転回数

||

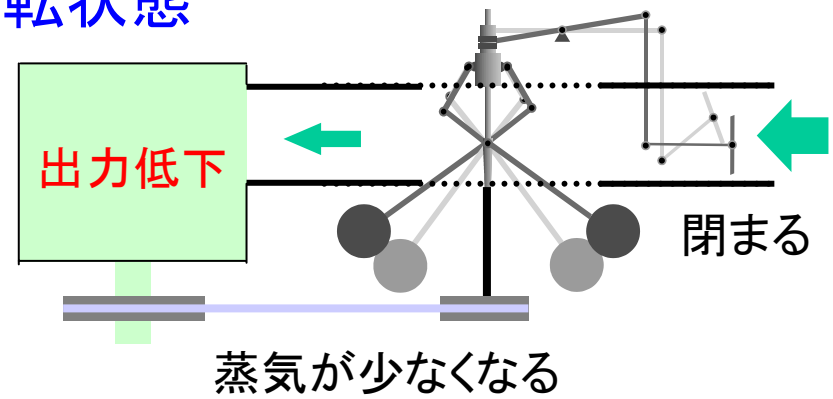
不安定根の数

ワットの調速器（governer）－ 1788

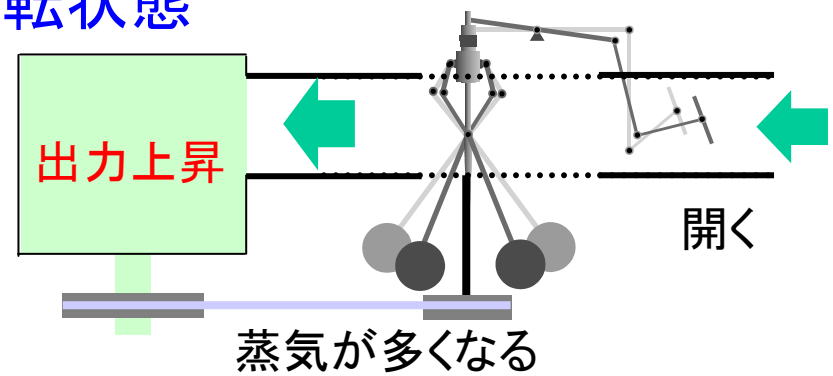
中立状態

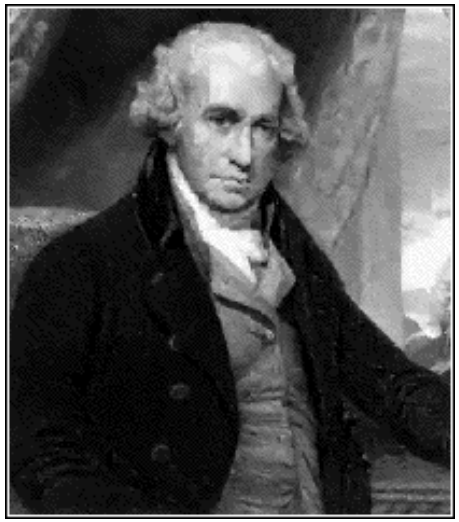


高速回転状態

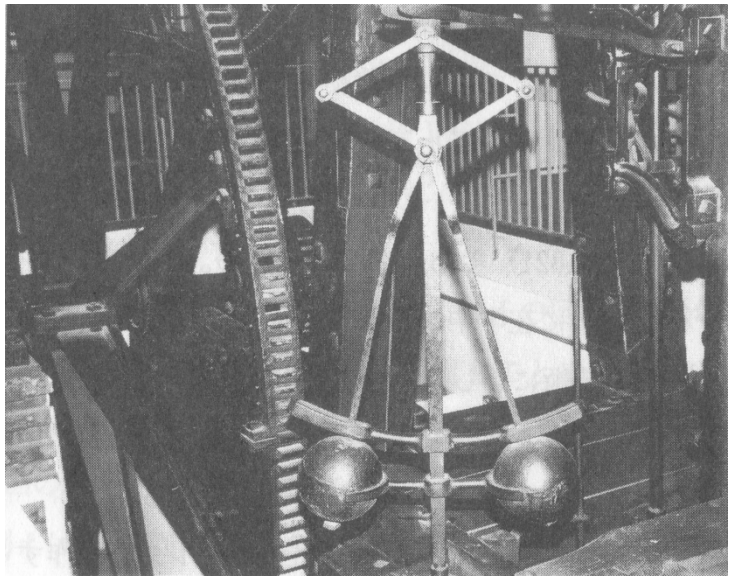


低速回転状態

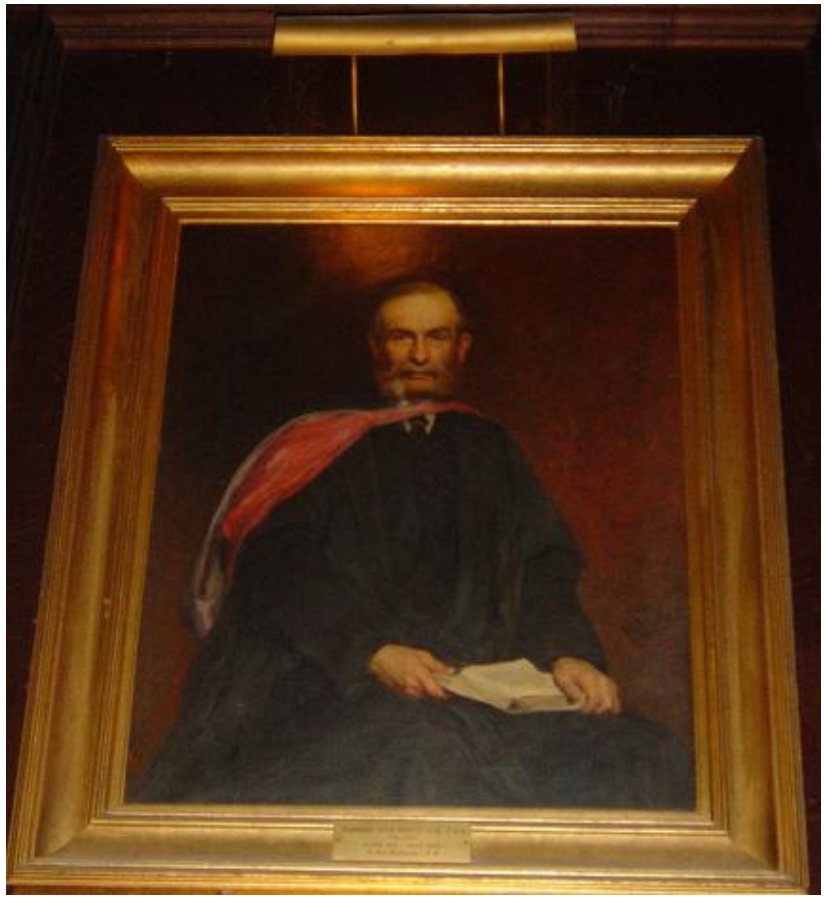




James Watt
（1736～1819）

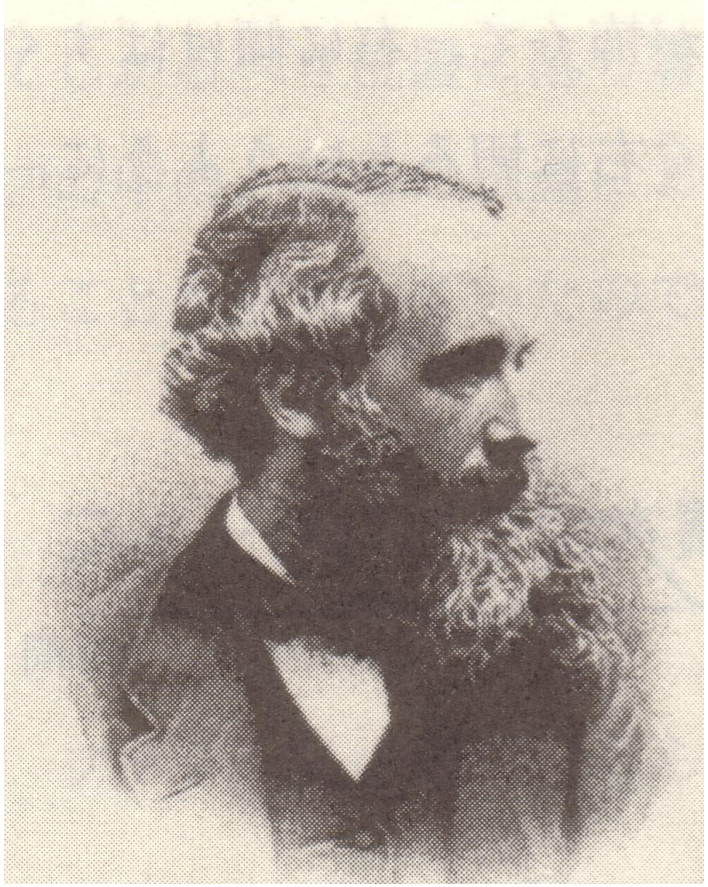


制御理論の芽生え



Edward John Routh
（1831～1907）

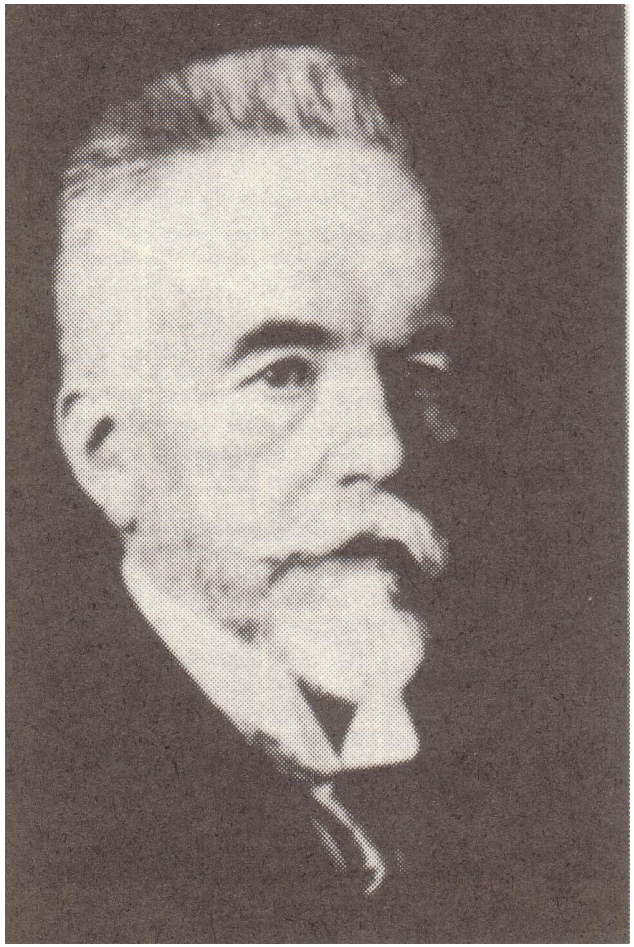
Adams Prize, 1877



James Clerk Maxwell
（1831～1879）

“On Governors”, 1868

Adolf Hurwitz
（1859-1919）



Aurel Boleslaw Stodola
（1859-1942）

[例]

$$D_2(s) = s^5 + s^4 + 6s^3 + 3s^2 + 4s + 1$$

s^5	+	1	6	4
s^4	+	1	3	1
s^3	+	$3 = \dfrac{1\times 6 - 1\times 3}{1}$	$3 = \dfrac{1\times 4 - 1\times 1}{1}$	
s^2	+	$2 = \dfrac{3\times 3 - 1\times 3}{3}$	$1 = \dfrac{3\times 1 - 1\times 0}{3}$	
s^1	+	$1.5 = \dfrac{2\times 3 - 3\times 1}{2}$		
s^0	+	$1 = \dfrac{1.5\times 1 - 2\times 0}{1.5}$		

よって

安定

[例題3.1]

$$D_1(s) = s^5 + s^4 + 3s^3 + 2s^2 + 6s + 2 = 0$$

s^5	$+$	1	3	6
s^4	$+$	1	2	2
s^3	$+$	$1 = \dfrac{1\times3-1\times2}{1}$	$4 = \dfrac{1\times6-1\times2}{1}$	
s^2	$-$	$-2 = \dfrac{1\times2-1\times4}{1}$	$2 = \dfrac{1\times2-1\times0}{1}$	
s^1	$+$	$5 = \dfrac{-2\times4-1\times2}{-2}$		
s^0	$+$	$2 = \dfrac{5\times2-(-2)\times0}{5}$		

不安定

不安定極は 2 個

［例］未定係数 K（ゲイン）

$$D(s) = s^3 + 2s^2 + s + K$$

s^3	1	1
s^2	2	K
s^1	$\dfrac{2\times 1 - 1\times K}{2} = \dfrac{2-K}{2}$ $\Rightarrow 2-K$	
s^0	$\dfrac{(2-K)\times K - 2\times 0}{2-K} = K$	

ある行に正の数をかけてもよい

よって $2-K>0$ かつ $K>0$

$\therefore 0<K<2$ ならば安定

第 3 章 :ダイナミカルシステムの過渡応答と安定性

3.5 ダイナミカルシステムの安定性

キーワード： 安定性, ラウスの安定判別法

学習目標:システムが安定か否かを伝達関数の係数から簡単に判別するラウスの安定判別法を習得する.