

バイオメカニズム特論

第3回講義内容

- 1 前回宿題解説
- 2 0.75乗則のつづき
- 3 長骨の半径と厚さの最適性に関する理論
 - 3.1 降伏応力を基準にしたモデル
 - 3.2 たわみを基準にしたモデル
 - 3.3 衝撃強さを基準にしたモデル
 - 3.4 極限強さを基準にしたモデル

基礎代謝量と生物の質量の関係

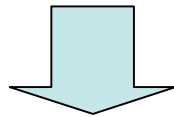
$$P \propto M_b^{0.75} \quad 0.75\text{乗則}$$

単位質量あたりでは

$$P_u \propto M_b^{-0.25}$$

0. 75乗則をめぐる議論

熱放散では0.75乗則を説明できない.



二つの学説

弾性相似則に着目

毛細血管のフラクタル構造に着目

指数0.75の導出

McMahon (1973年)の学説

基本的な考え方:

地上(重力下)で動物が体躯の形状を維持するには筋肉を活動させる必要があり, これが基礎代謝量に関係していると考える.

胴体が大きければ, 筋肉の断面積も増えるが質量も増加する.

動物の体形は幾何学的相似則ではなさそうだ.

小動物は細身だが大きくなると胴回りが太くなるようだ.

(幾何学的相似則が成立すると, $P \propto d^2 \propto M_b^{2/3}$ となってしまう.)

→法則性はないか. →折れ曲がりにくさに注目

弾性相似則を適用

身体の折れ曲がりにくさを数式で表現

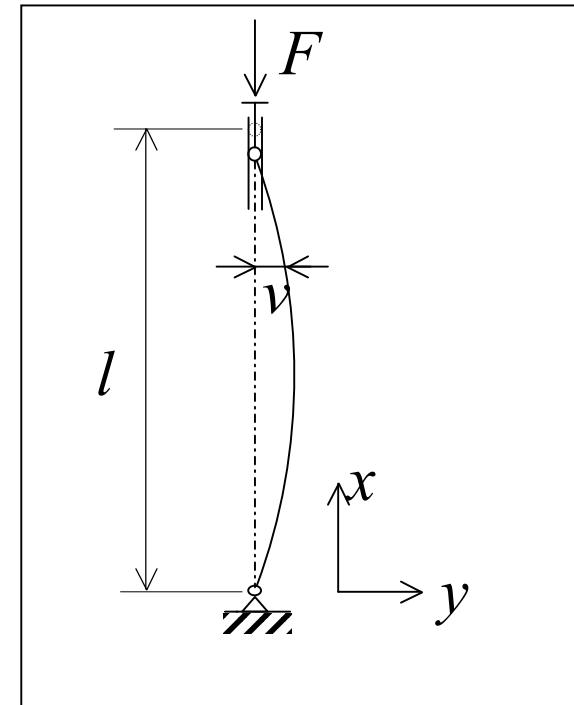


弾性はりの座屈条件を利用

$$F = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

E : ヤング率

I : 断面二次モーメント



弾性相似則（続き）

F は胴体の重量に比例すると仮定

$$F \propto \pi d^2 l \rho g$$

ρ : 見かけ上の密度

g : 重力加速度

d : 胴体の直径

座屈しない限界長さ l_k と直径 d の関係

$$\ell_K^3 \propto d^2$$

胴体質量は全体の質量に比例→

$$d \propto M_b^{\frac{3}{8}}$$

筋肉の活動

身体が座屈しないように胴体の筋肉が活動（収縮）する仕事量を見積もる.

筋肉の仕事量

$$W \propto \sigma A \Delta \ell$$

σ : 筋肉の単位面積あたりの収縮力

A : 筋肉の断面積

単位時間当たり

$$P \propto \sigma A \frac{\Delta \ell}{\Delta t} \propto d^2$$

$\Delta \ell$: 収縮長さ

Δt : 収縮時間

筋肉の収縮力, 収縮速度は一定と仮定

$$P \propto M_b^{\frac{3}{4}}$$

0.75乗則：もう一つの学説

G.B.West, J.H.Brown and B.J.Enquist,
Science, Vol.276, pp.122-126(1997)

毛細血管のフラクタル構造に注目して0.75乗則を
導出する.

基本的な考え方

1. ミクロレベルの血流に注目

動物の大小を問わず細胞組織のレベルでは同じ特性をもっているはずである. 特に血液から細胞に供給される酸素や栄養の量は同じ性能になっていると予想される.

2. 血流を供給する血管の構造

血管の構造は分岐しながら管径および長さが小さくなる. 動物の大きさによって分岐回数に差があるにしても末端の毛細血管は同じスケール, 特性になっていると予想される.

3. 血管構造の規則性

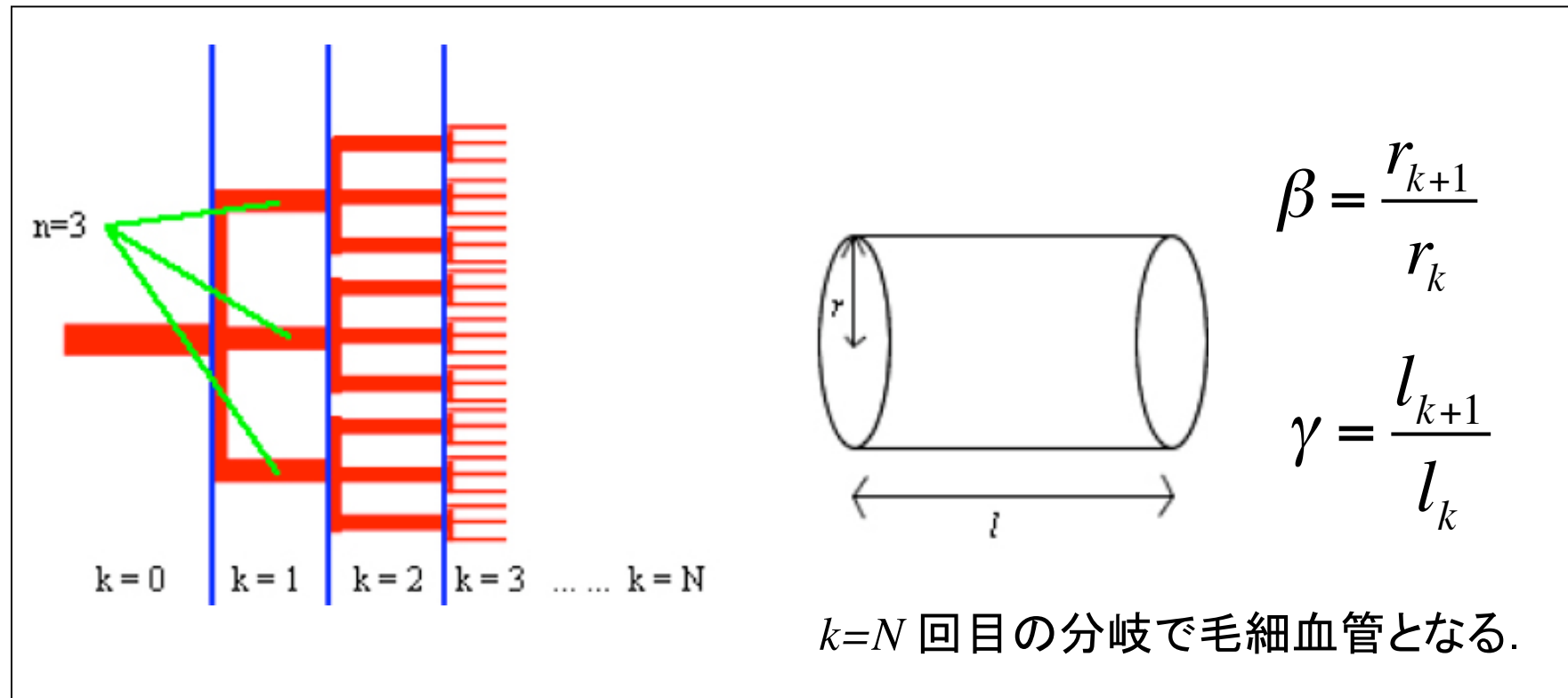
血液が細胞に酸素や栄養を効率的に供給するには血管構造にそれなりの形の秩序があると予想される. この形の秩序を示す数学的表現としてフラクタルの考え方を利用する.

0.75を導出するために必要な仮定

1. 血管の構造は自己相似性(フラクタル)をしている.
2. 血管断面の総面積は各分岐レベルで同じである.
3. 血管は三次元空間に充填的に張りめぐらされている.
(生体組織の活動を維持するため.)
4. 毛細血管は動物によらず同じスケール, 特性になっている.
5. 生物体の質量は体内の総血液量に比例する.

仮定1: 血管はフラクタル構造

血管は自己相似性のフラクタル構造をしている. つまり各分岐レベルで同様な分岐数で分岐し, 血管の径, 長さは同じ比率で縮小する.



仮定 2 : 血管断面の総面積は同じ

血管断面の総面積は各分岐レベルで同じ.
(血流の面積が一定になるように分岐.)

$$N_k \pi r_k^2 = N_{k+1} \pi r_{k+1}^2$$

$$\beta = \frac{r_{k+1}}{r_k} = n^{-1/2}$$

N_k : 分岐 k 回目の血管総数

r_k : k 回目の血管半径

n : 分岐本数

仮定 3 血管は三次元的に空間を充填

血管は生体組織の活性化を維持するために三次元空間に張りめぐらされ、細胞の活動を支援している。

生体組織への酸素、栄養供給能力は血管長さが支配的($\because r \ll l$)。

三次元フラクタル構造より分岐 k 回目での血管が受け持つ生体組織の体積は k によらず大体等しいとすると

$$N_k l_k^3 \approx N_{k+1} l_{k+1}^3$$

$$\frac{l_k^3}{l_{k+1}^3} \approx n$$

$$\gamma = \frac{l_{k+1}}{l_k} \approx n^{-1/3}$$

“The fractal geometry of nature”,
by Mandelbrot より

仮定 4 : 毛細血管のスケール, 特性は同じ

毛細血管の直径, 長さ, 平均流速は動物によらず一定.
細胞レベルでは酸素や栄養を供給する性能 (単位体積当たり) は同じと仮定.

仮定 5 : 生物体の質量は総血液量に比例.

血液量が多いほど多くの生体組織を維持可能. (活動可能な生体組織の体積は総血液量に比例する.)

$$V_b = 65.6 M_b^{1.02}$$

Blood volume: V_b , in ml,

Body mass: M_b , in kg

Reported by Stahl (1967)

血液量が質量と結びついている.

0.75の導出（続き）

血液量の見積もり

$$\begin{aligned} V_b &= \sum_{k=0}^N N_k V_k = \sum_{k=0}^N n^k \pi r_k^2 l_k \\ &= \pi r_0^2 l_0 \sum_{k=0}^N (\beta^2 \gamma n)^k \\ &= \pi r_N^2 l_N (\beta^2 \gamma)^{-N} \frac{1 - (\beta^2 \gamma n)^{N+1}}{1 - \beta^2 \gamma n} \end{aligned}$$

$\beta^2 \gamma n < 1, N \approx 22 \sim 34 \rightarrow$ 分子の部分 $\doteq 1$, 分母は定数.

$$\therefore V_b \propto (\beta^2 \gamma)^{-N} V_N \propto n^{\frac{4}{3}N} \propto M_b \quad (\text{毛細血管内の体積 } V_N \text{ は定数})$$

血管の分岐数と分岐回数がわかれば血液量がわかるという式.

0.75の導出（続き）

基礎代謝量 P は、単位時間あたりの血液流量（総血液量ではない）に比例すると考えるのが妥当.

$$\dot{Q}_0 = N_k \dot{Q}_k = N_k \pi r_k^2 \bar{v}_k = N_N \pi r_N^2 \bar{v}_N \propto n^N$$

（毛細血管での流量は同じ）

$$\therefore P \propto \dot{Q}_0 \propto n^N$$

基礎代謝量 P も n と N のみで表現される.

$\dot{Q}_k$: 分岐 k 回目での血管
1本当たりの流量

$\bar{v}_k$: 平均流速

$$M_b \propto n^{\frac{4}{3}N} \text{ より}$$

$$P \propto M_b^{\frac{3}{4}}$$

血管分岐の3乗則と矛盾しないか？

困った事実

細胞レベルでも0.75乗則が成立しているという報告がある.

長骨の長さ と 厚さの関係

骨の半径 R と 厚さ t の計測結果

地上で生活する動物の骨は R/t が2程度が多い.

"Bones" by J.D.Currey

骨の厚さと直径の関係について

骨の機能

- ・ 身体を支える（支持機能）
- ・ 血液を造る（造血機能） ← 髄液が必要

骨の強度が同じなら材料（骨）は少ない方がよい。
パイプ状構造は曲げモーメントを支えるのに有効。



厚さが薄くて半径が大きいほど有利？

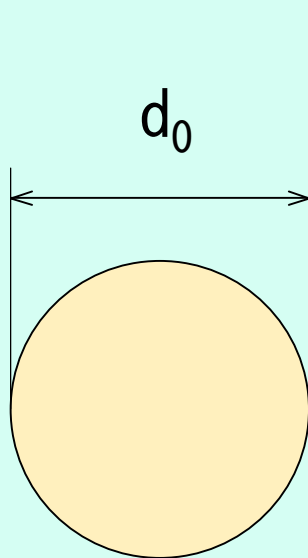
髄液の質量が影響するため必ずしも有利ではない。

（骨の密度/髄液の密度 $\doteq$ 2）

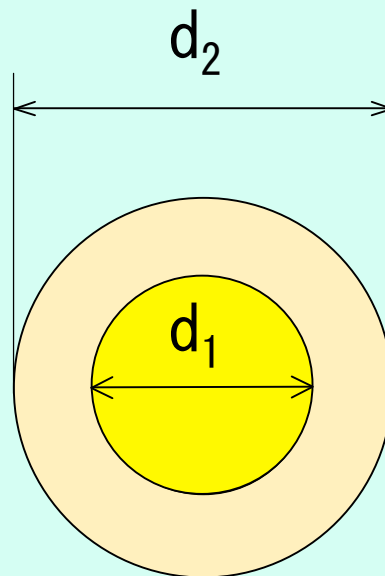
※長骨には適度な外径と内径の比が存在すると予想。

モデル化

方針：構造物としての強度が同じという条件下で
中実丸棒を基準に中空丸棒の質量を比較.



中実丸棒



中空丸棒

■ 骨の密度 : ρ_c
■ 髄液の密度 : ρ_m

評価基準

Impact strength: 衝撃強さを基準

Ultimate strength: 極限強さを基準

Yield or fatigue strength: 曲げ応力を基準

Stiffness: たわみを基準

降伏応力（yield or fatigue）を基準にした場合

曲げモーメントによって発生する応力

$$\sigma = \frac{M}{Z}$$

断面係数

中実の場合： $Z_0 = I_0 / \left(\frac{d_0}{2} \right) = \frac{\pi}{32} d_0^3$ ただし,
 $\left(I_m = \frac{\pi}{64} (d_2^4 - d_1^4) \right)$

中空の場合： $Z_m = I_m / \left(\frac{d_2}{2} \right) = \frac{\pi}{32} d_2^3 \left(1 - \left(\frac{d_1}{d_2} \right)^4 \right)$

強度を同じにする条件 $Z_0 = Z_m \quad \therefore d_0^3 = d_2^3 \left\{ 1 - \left(\frac{d_1}{d_2} \right)^4 \right\}$

中実に対する中空の質量比

単位長さ当たりの質量比

$$\begin{aligned}\frac{M_m}{M_0} &= \frac{\frac{\pi}{4}(d_2^2 - d_1^2)\rho_c + \frac{\pi}{4}d_1^2\rho_m}{\frac{\pi}{4}d_0^2\rho_c} = \frac{(d_2^2 - d_1^2) + \frac{\rho_m}{\rho_c}d_1^2}{d_0^2} \\ &= \frac{\left\{1 - \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2\right\} + \frac{\rho_m}{\rho_c}\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2}{\left\{1 - \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4\right\}^{\frac{2}{3}}}\end{aligned}$$

質量比が最小となる R/t

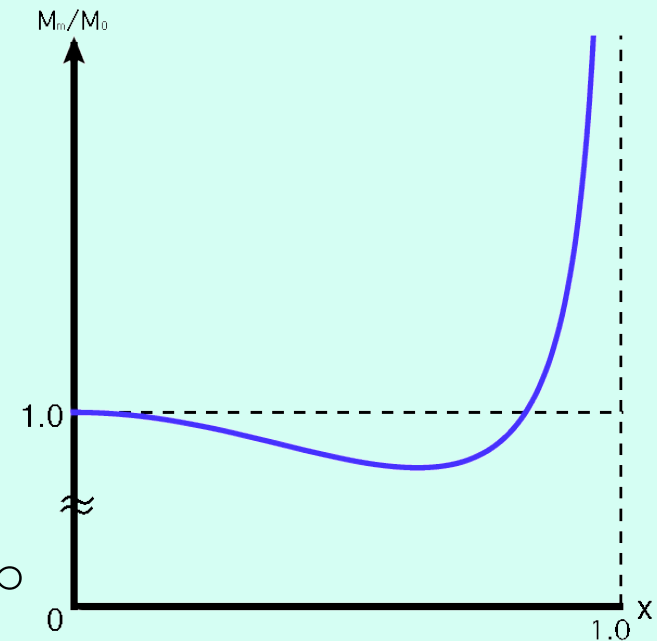
骨密度 $\rho_c=2$, 髄液の密度 $\rho_m=1$ とし, $d_1/d_2=x$ とおく.

$$\frac{M_m}{M_0} = \frac{1 - 0.5x^2}{(1 - x^4)^{\frac{2}{3}}}$$

x は 0 から 1 の範囲で変化

$x = 0$ (中実) で $M_m/M_0 = 1$

$x \rightarrow 1$ (極めて薄い中空) で $M_m/M_0 \rightarrow \infty$



質量比が最小となる x の値から R/t (外半径/厚さ) を計算せよ.

たわみ量(stiffness)を基準にした場合

はりのたわみの方程式

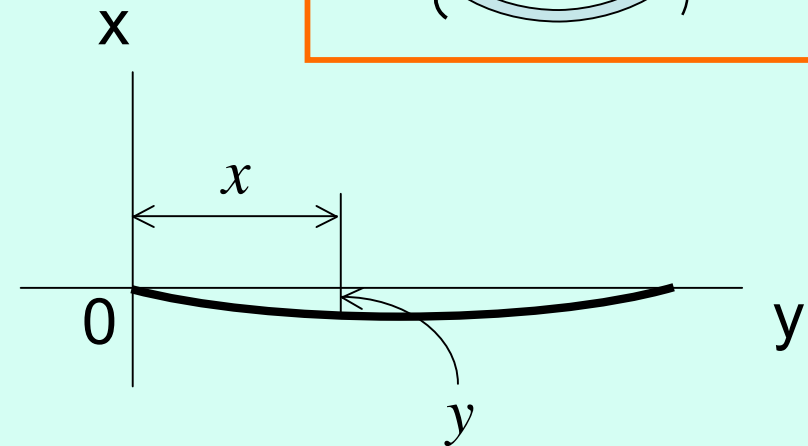
$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

$$\text{たわみ量} \propto I^{-1}$$

$$\therefore I_0 = I_m$$

$$d_0^4 = d_2^4 \left(1 - \left(\frac{d_1}{d_2} \right)^4 \right)$$

曲げモーメントの正方向



たわみ量を基準にした場合

$$\begin{aligned}\frac{M_m}{M_o} &= \frac{(d_2^2 - d_1^2) + \frac{\rho_m}{\rho_c} d_1^2}{d_o^2} = \frac{(d_2^2 - d_1^2) + \frac{\rho_m}{\rho_c} d_1^2}{\sqrt{d_2^4 - d_1^4}} \\ &= \frac{1 + \left(\frac{\rho_m}{\rho_c} - 1\right) \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4}}\end{aligned}$$

$$\rho_c = 2, \quad \rho_m = 1, \quad d_1/d_2 = x \text{ より}$$

$$\frac{M_m}{M_o} = \frac{1 - 0.5x^2}{\sqrt{1 - x^4}}$$

質量比が最小となる x の値から R/t (外半径/厚さ) を計算せよ.

衝撃荷重 (impact strength) を基準にした場合

衝撃荷重で発生する応力値の見積り

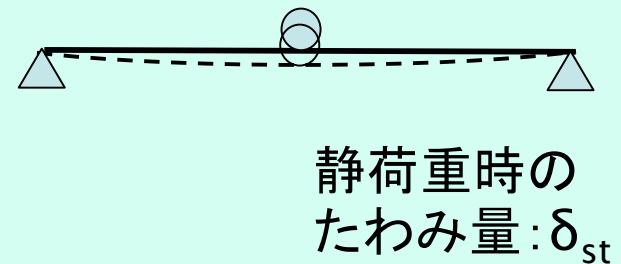
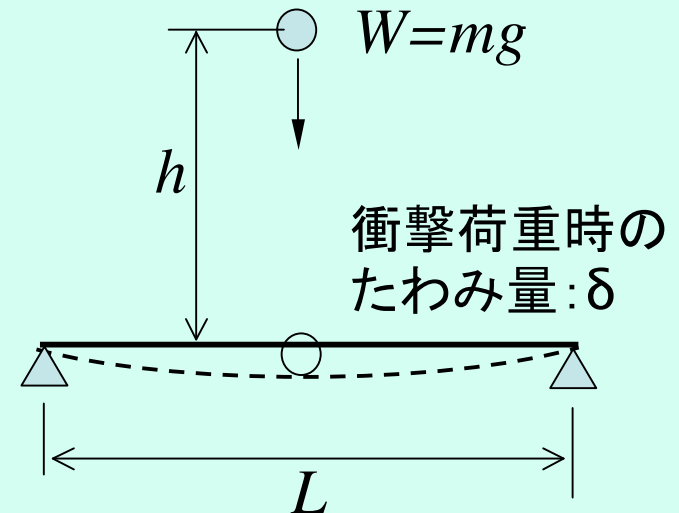
位置エネルギーがはりの弾性エネルギーに全て変換された時が応力の最大値.

$$mg(h + \delta) \approx mgh = \frac{1}{2} k \delta^2$$

はりのばね定数 k は以下の関係より求まる.

$$W = mg = k \delta_{st}$$

$$\text{ここで } \delta_{st} = \frac{WL^3}{48EI}$$



衝撃荷重 (impact strength) を基準にした場合

衝撃荷重時に発生する応力もたわみ量に比例して増大するので

$$\sigma = \frac{\delta}{\delta_{st}} \sigma_{st}$$

ここで静荷重時に発生する応力は $\sigma_{st} = \frac{M}{Z} = \frac{WL}{4} \frac{d}{2I}$

以上より衝撃荷重時の応力は以下のように見積もられる.

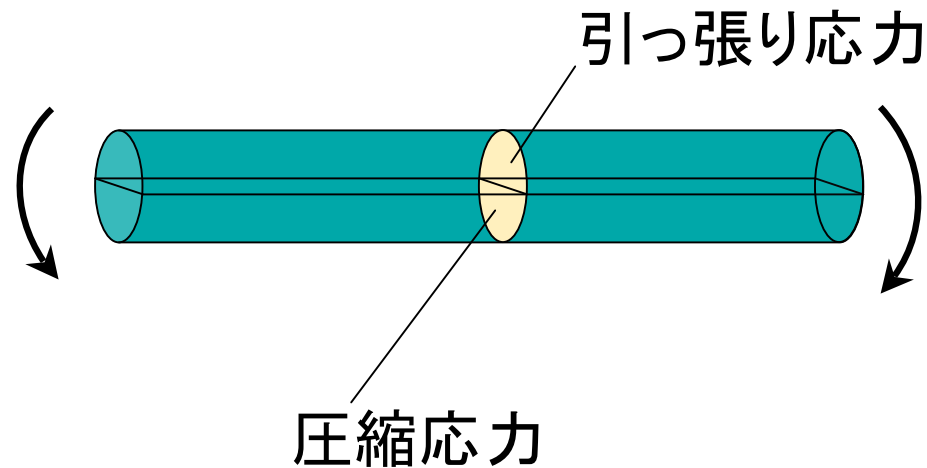
$$\sigma = \sqrt{\frac{6WhEd^2}{4LI}} \propto \frac{d}{\sqrt{I}}$$

したがって中実丸棒と中空丸棒に成立すべき条件式は

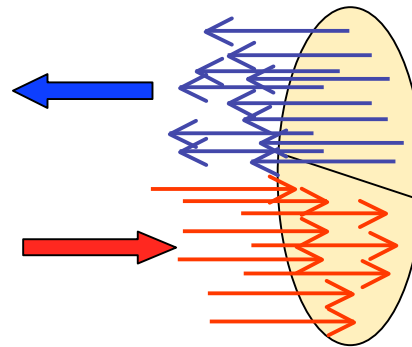
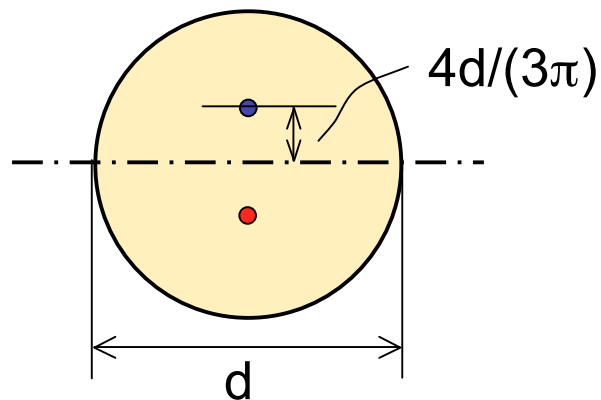
$$\frac{d_0}{\sqrt{I_0}} = \frac{d_2}{\sqrt{I_m}} \quad \text{ただし} \quad I_0 = \frac{\pi}{64} d_0^4 \quad I_m = \frac{\pi}{64} (d_2^4 - d_1^4)$$

極限強さ (Ultimate strength)

忠実円柱の
場合



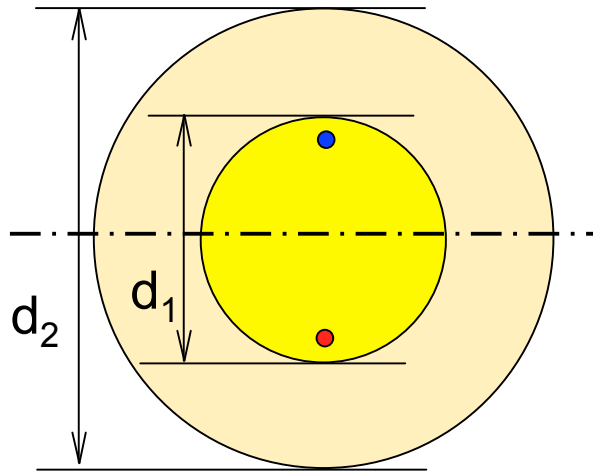
※引張強度と圧縮強度は等しいと仮定.



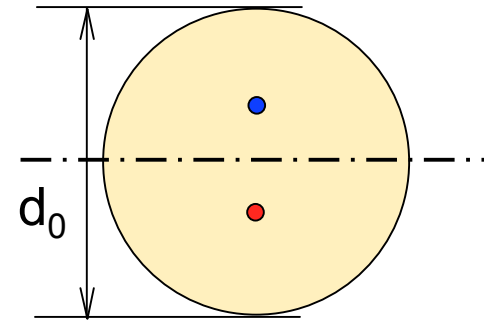
破壊寸前の応力状態.
引張力と圧縮力の中立
線からの合成モーメント
は等しい。

中立線からのモーメントバランス

中立線上半分の合成モーメントを計算



$$\frac{4d_2}{3\pi} \frac{1}{4} \pi d_2^2 - \frac{4d_1}{3\pi} \frac{1}{4} \pi d_1^2$$



$$\frac{4d_0}{3\pi} \frac{1}{4} \pi d_0^2$$

$$\therefore d_2^3 - d_1^3 = d_0^3$$

疑問

骨の厚みの最適化は質量換算にすると10%程度である. そんなに意味があるのか. (質量最適化は骨の構造を決定する上で重要なファクターになっていない?)

第3回講義の宿題

Impact strength または Ultimate strength
の評価指標に基づく R/t の最適値とその時
の忠実棒を基準にした軽減率を求めよ。
(導出過程も書くこと。)

第3回講義おわり